





CALCOLO DIFFERENZIALE.

Tipografia A. Trani Conte di Mola 13.



TRATTATO

SUL

CALCOLO DIFFERENZIALE

CON MOLTI ESEMPII.

PER

I. TODHUNTER, M. A.

SOCIO DEL COLLEGIO DI S. GIOVANNI, A CAMBRIDGE.

Versione dall' inglese con aggiunte

PER

G. BATTAGLINI

Prof. di Geometria superiore nell' Università di Napoli.





NAPOLI

LIBRERIA SCIENTIFICA E INDUSTRIALE

DI B. PELLERANO

Str. di Chiaia 60.

1870.

AVVERTIMENTO DEL TRADUTTORE.

Nel pubblicare questa traduzione del *Calcolo Differenziale ed Integrale* del Signor I. Todhunter, non abbiamo avuto altro scopo se non di aggiungere ai libri, che corrono per le mani degli Studenti delle nostre Università, un' opera notevole per la chiarezza dell' esposizione, il rigore delle dimostrazioni, la giusta proporzione nelle parti, ed il ricco corredo di esempii, che offrono largo campo ad utili esercitazioni. Per rendere l' opera adatta all' insegnamento Universitario, nel modo che trovasi ordinato tra noi, abbiamo creduto dovervi aggiungere alcune appendici, le quali riguardano, pel Calcolo Differenziale, i principii della teoria delle linee a doppia curvatura, e delle superficie curve, e pel Calcolo Integrale, i principii dell' integrazione delle equazioni differenziali: i capitoli che costituiscono tali appendici sono stati tratti dall' eccellente opera del Cournot, *Traité élémentaire de la Théorie des Fonctions et du Calcul Infinitésimal.*

Si è messo ogni cura affinchè, per correzione e nitidezza di caratteri, questa edizione italiana emulasse la inglese. Se gli studiosi ritrarranno alcun vantaggio da questo lavoro, i nostri voti saranno pienamente soddisfatti.

PREFAZIONE ALLA TERZA EDIZIONE.

Nella presente opera mi sono studiato di esibire un quadro generale del Calcolo Differenziale seguendo il metodo dei Limiti. Nelle parti più elementari sono entrato in minute particolarità nelle spiegazioni, con la speranza che un lettore non assistito da maestro potesse rendersi atto ad acquistare una sufficiente conoscenza del soggetto. Ai diversi capitoli si troveranno aggiunti Esempii abbastanza numerosi per rendere un altro libro non necessario. Questi esempii sono stati scelti quasi esclusivamente dalle Memorie degli Esami del Collegio e della Università: si vedrà che la maggior parte di essi non presenta alcuna seria difficoltà allo studente, sebbene alcuni pochi richiedano una particolare abilità nell'analisi.

La mia propria esperienza con gli allievi è stata decisamente sfavorevole al sistema dei Differenziali; molti abili insegnanti che ho consultato hanno espresso una simile opinione, ed io ho perciò adattato esclusivamente il metodo dei Coefficienti Differenziali.

Sovente ho dato più di una sola investigazione di un teorema, poichè credo che lo studente ritragga vantaggio dal considerare la stessa proposizione sotto diversi aspetti, e che, per riuscire negli esami a dare, egli debba essere preparato per mezzo di una considerevole varietà nel modo di ordinare le diverse parti del soggetto, e di una corrispondente varietà nel modo di dimostrazione.

Siccome il mio solo oggetto è stato quello di produrre un'opera utile, non ho esitato ad avvalermi delle opere elementari che già si hanno; una nota di quelle cui sono principalmente debitore è quì appresso indicata.

Debbo i miei ringraziamenti ai molti amici che hanno preso interesse al libro, e che mi hanno favorito con le loro valevoli indicazioni e correzioni, le quali hanno fatto sparire da esso varie imperfezioni che altrimenti avrebbe contenuto.

Le prime edizioni contenevano poche pagine sul Calcolo Integrale; queste sono state poi incorporate in un trattato distinto su tale argomento, e per conseguenza non sono quì ristampate. Lo spazio così guadagnato mi ha permesso di spiegare più diffusamente alcune parti del soggetto che per esperienza si trovano essere difficoltose agli studenti.

I. TODHUNTER.

Collegio di S. Giovanni
Marzo 1860.

Cournot, *Traité élémentaire de la Théorie des Fonctions et du Calcul Infinitésimal*, 2 vol. 8.° Paris, 1841.

De Morgan, *Differential and Integral Calculus*. Lond. 1842.

Duhamel, *Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique*, 2.e edit., 2 vol. 8.° Paris, 1847.

Moigno, *Leçons de Calcul Différentiel et de Calcul Intégral*, 2 vol. 8.° Paris, 1840-44.

Navier, *Résumé des Leçons d'Analyse données à l'Ecole Polytechnique*, 2 vol. 8.° Paris, 1840.

Schlömilch, *Handbuch der Differential-und Integralrechnung* Greifswald, 1847.

INDICE.

Gli studenti che leggono questa opera per la prima volta possono omettere gli Articoli seguenti:

23, 83, 98—113, 141—143, 151, 156, 163—166, 185—189, 200, 206—208, 219, 220, 222, 226, 235—240, 248—256, 365—368.

AGGIUNTE.

Pagina.	Linea.	ERRORI.	CORREZIONI. Si legga
20	23	$\frac{dy}{dz}$	$\frac{dy}{dx}$
41	1	$\sec x = y$	$\sec y = x$
52	25	$\sqrt{a + x)}$	$\sqrt{(a + x)}$
67	5	$\{x + a\sqrt{(-1)^{n+1}}$	$\{x + a\sqrt{(-1)}\}^{n+1}$
110	4	$\frac{d^2u}{dy^2}$	$\frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2}$
186	15	$\frac{d\theta}{d\varphi}$	$\frac{d}{d\varphi}$
197	3	$\frac{d^2u}{dx^2}$	$\frac{d^2y}{dx^2}$
228	20	u	di u
238	9	valori	valori di
263	21	$\frac{dz}{d\varphi}$	$\frac{dz}{dx}$
285	7	infinito	finito
350	28	dell'	dall'

CALCOLO DIFFERENZIALE.

CAPITOLO I.

DEFINIZIONI — LIMITE — INFINITO.

1. Se due quantità suscettibili di cangiamento sono collegate in modo che variando una di esse si ha per conseguenza una variazione nell'altra, la seconda quantità si dice *funzione* della prima. Così essendo x un simbolo al quale possiamo assegnare diversi valori numerici, le espressioni come $x^2, 3^x, \log x$, e $\operatorname{sen} x$, sono tutte *funzioni* di x. Se una funzione di x si suppone eguale ad un'altra quantità, come per esempio $\operatorname{sen} x = y$, allora ambedue le quantità si dicono *variabili*, una di esse essendo la *variabile indipendente* e l'altra la *variabile dipendente*. Una *variabile indipendente* è una quantità alla quale possiamo supporre assegnato arbitrariamente un valore qualunque; una *variabile dipendente* è una quantità il valore della quale è determinato allorchè si conosce quello di qualche variabile indipendente. Sovente quando si considerano due o più variabili è in nostro potere fissare ad arbitrio la variabile *indipendente*, ma una volta fatta la nostra scelta non è più lecito far cangiamento a questo riguardo nel corso delle operazioni; almeno un tal cangiamento richiederebbe alcune precauzioni e trasformazioni.

2. Generalmente si dinotano le funzioni con simboli come $F(x), f(x), \varphi(x), \psi(x)$, e simili, la variabile essendo indicata da x. Un'equazione quale $y = \varphi(x)$ esprime che la variabile dipendente y è così collegata alla variabile indipendente x, che il valore di y è conosciuto allorchè quello di x è dato, e che se un cangiamento si opera nel valore numerico assegnato ad x, il cangiamento che consegue in y può essere trovato.

3. Lo studente probabilmente ha già avuto occasione di considerare il significato dei termini « quantità variabile » e « funzione » che abbiamo qui introdotti. Nei trattati sulle sezioni coniche, per esempio, occorre l'equazione $y=2\sqrt{ax}$, in cui x è un simbolo generale al quale possono essere assegnati diversi valori numerici, ed a è un simbolo al quale si suppone assegnato un certo valore numerico invariabile, e che perciò è chiamato una « costante ». Per ogni valore dato ad x possiamo dedurre il corrispondente valore numerico di y. Nell'equazione $y=2\sqrt{ax}$, poichè il valore di y dipende sì da quello di a che da quello di x, possiamo dire che y è una funzione di a e di x. Segue da ciò che possono usarsi simboli come $F(a,x)$ per dinotare una funzione di a ed x, ed un'equazione quale $y=\varphi(x,z,t)$ indica che y è una funzione delle tre quantità dinotate dai simboli x, z e t.

4. Nell'equazione $y=2\sqrt{ax}$, conoscendo che a dev'essere una quantità *costante* nel corso di qualche ricerca da noi intrapresa, spesso non porremo mente a questa costante, e continueremo a parlare di y come una funzione di x. Similmente l'equazione $y=\frac{b}{a}\sqrt{(a^2-x^2)}$ può essere rappresentata con $y=\varphi(x)$, in cui poniamo in evidenza solamente quel simbolo x il quale nel corso delle nostre investigazioni sarà considerato variabile.

5. Se l'equazione che lega le variabili x ed y è tale che si trovi la *sola* y in un membro e nell'altro membro una espressione che racchiude x e non y, si dice che y è una funzione *esplicita* di x. Quando un'equazione tra x ed y non è di questa forma, si dice che y è una funzione *implicita* di x. Così se $y=ax^2+bx+c$, y è una funzione esplicita di x. Se $ay^2-2bxy+cx^2+g=0$, y è una funzione implicita di x. Le parole *funzione implicita* suppongono che y sia realmente una *funzione* di x nel senso in cui abbiamo usato la parola funzione. Questa supposizione si vedrà essere vera nell'esempio dato, poichè con la risoluzione di un'equazione quadratica possiamo esibire y come una funzione di x; o piuttosto possiamo dedurre che y deve essere una tra due funzioni esplicite di x, cioè

$$\frac{bx+\sqrt{\{(b^2-ac)x^2-ag\}}}{a} \quad \text{o} \quad \frac{bx-\sqrt{\{(b^2-ac)x^2-ag\}}}{a}.$$

Ritorneremo su questo punto in seguito, nell'Art. 58.

6. Le funzioni esplicite possono essere divise in *algebriche* e *trascendenti*. Le prime sono quelle in cui le sole operazioni indicate sono l'addizione, la sottrazione, la moltiplicazione, la divisione, e l'elevazione di una quantità ad una conosciuta potenza o l'estrazione di una conosciuta radice; le altre sono quelle che racchiudono altre operazioni, come le funzioni esponenziali, le funzioni logaritmiche, e le funzioni trigonometriche. Noi qui supponiamo che il numero delle operazioni indicate sia *finito;* poichè come vedremo in appresso una funzione trascendente può essere equivalente ad una serie infinita di funzioni algebriche.

Alla variabile indipendente in un'equazione possiamo supporre assegnato un valore qualunque, positivo o negativo, tanto grande o tanto piccolo quanto ci aggrada. Se supponiamo una serie di diversi valori assegnati ad x, a cominciare da un valore negativo numericamente molto grande e che va gradatamente crescendo algebricamente sino ad un grande valore positivo, la serie dei valori che si ottengono per y può presentare risultati molto diversi. Per esempio, se $y=x^3$, i valori di y formeranno una serie che comincia con un valore negativo numericamente grande, e va crescendo algebricamente sino ad un grande valore positivo. Se $y=x^2$, i valori di y sono sempre positivi, o formano una serie prima decrescente e poi crescente. Se $y=\sqrt{(a^2-x^2)}$, i valori di y sono immaginari per ogni valore di x non compreso tra $-a$ e $+a$.

7. Passiamo ad un altro esempio più importante pel nostro scopo. Sia $y=\frac{x}{1+x}$, e si consideri la serie dei valori che prende y allorchè si assegnano ad x diversi valori *positivi*. Quando $x=0$, $y=0$, e quando x ha un valore positivo qualunque, y è una frazione propria positiva. Ponendo y sotto la forma $1-\frac{1}{1+x}$, si vede che al crescere di x cresce anche y, ma essendo y una frazione propria non può mai raggiungere l'unità. La differenza tra y e l'unità è $\frac{1}{1+x}$; questa frazione diminuisce al crescere di x, e *può essere resa minore di qualunque frazione assegnata, per piccola che sia, dando un valore sufficientemente grande ad x.* Così se vogliamo che y differisca dall'unità per una quantità minore di $\frac{1}{100,000}$, si

faccia $x=100,000$ ed il risultato richiesto sarà ottenuto. Se desideriamo far differire y dall' unità per una quantità minore di $\frac{1}{1,000,000}$, si ponga $x=1,000,000$, e sarà raggiunto lo scopo. In queste circostanze si dice che « il *limite* di y allorchè x cresce indefinitamente è l' unità. »

8. La nozione di *limite* è della più grande importanza; infatti tutto il Calcolo Differenziale consiste nell'esporre le conseguenze che discendono da questa nozione. Lo studente probabilmente ha già incontrato dei casi in cui la parola *limite* è stata usata, ai quali sarà utile di ricorrere. Per esempio, la somma della progressione geometrica $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+$ etc. continuata sino ad n termini è $2-\frac{1}{2^{n-1}}$, da cui egli ha dedotto il risultato che il *limite* della serie quando il numero dei termini cresce indefinitamente è 2.

9. Un esempio molto importante di *limite* s' incontra nelle opere sulla Trigonometria. Vi si dimostra che se θ dinota la misura circolare di un angolo, la frazione $\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}$, se θ diminuisce indefinitamente, si avvicinerà quanto si vuole all' unità. In altre parole il *limite* di $\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}$, a misura che θ diminuisce continuamente è l' unità. Esprimeremo ciò dicendo « il limite di $\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}$, *quando* $\theta=0$, è l' unità » o sia, usiamo le parole « *quando* $\theta=0$ » come un' abbreviazione di « *quando* θ *diminuisce continuamente verso zero* » o per « *quando* θ *diminuisce senza limite.* »

10. La proposizione « il limite di $\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}$, quando $\theta=0$, è l' unità » è sovente espressa così « quando $\theta=0, \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}=1$ » o « quando $\theta=0$, sen $\theta=\theta$. » *Si ponga però ogni cura a non dimenticare che simili espressioni sono solamente abbreviazioni e non possono essere intese assolutamente.* Similmente il risultato ottenuto nell'Art. 7, cioè che il limite di $\frac{x}{1+x}$ allorchè

x cresce indefinitamente è l'unità, si esprimerebbe alle volte dicendo « quando x è infinito $\frac{x}{1+x}$ eguaglia l'unità. » Quì tutte e due le parti della sentenza sono abbreviazioni: « quando x è infinito » può avere solamente il significato di « quando x cresce senza limite, » ed « $\frac{x}{1+x}$ eguaglia l'unità » dinota a rigore « $\frac{x}{1+x}$ può farsi differire dall'unità per una quantità quanto si vuole piccola. »

11. Nell'esempio $y=\frac{x}{x+1}$ assegniamo ora ad x valori negativi. Si ponga $-z$ in vece di x; con ciò $y=\frac{z}{z-1}$. Si supponga ora z variare gradatamente da 0 ad 1; il numeratore di y è positivo e continuamente crescente, mentre il denominatore è negativo e numericamente continuamente decrescente. Il valore di y adunque è negativo ed in valore numerico cresce continuamente, e prendendo z sufficientemente vicino all'unità possiamo rendere *y grande quanto ci aggrada;* vale a dire, come z si avvicina all'unità y non ha limite finito. A motivo di brevità, ciò si esprime alle volte dicendo, « quando $z=1$, y è infinito; » ma non si deve dimenticare che quest'ultima frase *è un' abbreviazione*, e può solamente essere intesa così: « prendendo z sufficientemente vicino all'unità y può farsi superare qualunque grandezza assegnata, per quanto grande essa sia. » Non procederemo oltre con l'esempio; il lettore vedrà che quando z è maggiore dell'unità y è positivo; che y diminuisce continuamente a misura che z cresce, e si avvicina al limite l'unità quando z cresce indefinitamente.

12. Lo studente ha già veduto un'esempio analogo a quello considerato nell'articolo precedente, poichè probabilmente egli è stato avvezzo a dire « la tangente di un angolo di 90° è l'infinito. » Riflettendo egli vedrà che il solo modo in cui può darsi un significato a tale proposizione si è di considerarla un'abbreviazione della seguente: « a misura che un angolo cresce gradatamente sino a 90°, la tangente dell'angolo cresce, e prendendo l'angolo sufficientemente vicino a 90° possiamo rendere la tangente tanto grande quanto ci aggrada. » Noi non possiamo formarci un concetto distinto di una grandezza *infinita*, e questa parola può solamente essere

usata in Matematica come un' abbreviazione nel modo degli esempî quì considerati.

Se alla variabile indipendente x sono assegnati valori che cominciano da zero e crescono senza limite, si esprime ciò alle volte in modo abbreviato dicendo che x cresce da zero all' infinito.

13. Il significato della parola « limite » o l' equivalente « valore limite » s' intenderà dal suo uso negli articoli precedenti. Ciò che segue può essere dato come una definizione: « Il limite di una funzione per un valore assegnato della variabile indipendente, è quel valore dal quale si può far differire la funzione tanto poco quanto si vuole, facendo avvicinare la variabile indipendente al suo valore assegnato. »

14. Nell' esempio « limite di $\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = 1$ quando $\theta = 0$, » è chiaro che $\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}$ non è mai eguale ad 1 fin tanto che θ ha un valore qualunque diverso da zero, e se effettivamente poniamo $\theta = 0$, rendiamo l'espressione $\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}$ vuota di senso. In altri termini, benchè $\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}$ si avvicini tanto quanto ci aggrada al limite l' unità, *esso giammai raggiunge effettivamente questo limite*. Alle volte nella definizione del limite sono state introdotte le parole « quel valore che la funzione non raggiunge mai effettivamente. » Ma è più conveniente di ometterle; poichè se prendiamo una funzione di x, per esempio $\frac{x}{x+1}$, ed assegniamo ad x un valore, supponiamo 1, si può determinare il valore *attuale* della funzione, che in questo caso sarebbe $\frac{1}{2}$. In conformità della definizione che abbiamo data nell'articolo precedente possiamo chiamare se ci piace $\frac{1}{2}$ il *limite* di $\frac{x}{x+1}$ quando x si avvicina all' unità. Lo stesso vale per qualsivoglia valore finito di ogni funzione, e generalmente secondo la definizione del limite data nell' Art. 13, *ogni valore attuale di una funzione può essere considerato come un valore limite.*

15. *Limite di* $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$. Il teorema seguente, che procediamo a dimostrare, è molto importante. « Allorchè x cresce indefinitamente l'espressione $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ si avvicina ad un certo limite il quale è compreso tra 2 e 3. »

In primo luogo supponiamo x un numero intero positivo, $= m$ per esempio; mostreremo che l'espressione suddetta cresce continuamente con m, ma non può mai raggiungere il valore 3. Assumendo il Teorema del Binomio per gli esponenti interi positivi, abbiamo

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1 + m\frac{1}{m} + \frac{m(m-1)}{1.2}\left(\frac{1}{m}\right)^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\left(\frac{1}{m}\right)^3 + \dots + \frac{m(m-1)(m-2)\dots\{m-(m-1)\}}{1.2\dots m}\left(\frac{1}{m}\right)^m,$$

che può essere scritta

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1-\frac{1}{m}}{1.2} + \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)}{1.2.3} + \dots + \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\dots\left(1-\frac{m-1}{m}\right)}{1.2\dots m} \dots (1).$$

Similmente

$$\left(1+\frac{1}{1+m}\right)^{m+1} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1-\frac{1}{m+1}}{1.2} + \frac{\left(1-\frac{1}{m+1}\right)\left(1-\frac{2}{m+1}\right)}{1.2.3} + \dots + \frac{\left(1-\frac{1}{m+1}\right)\left(1-\frac{2}{m+1}\right)\dots\left(1-\frac{m}{m+1}\right)}{1.2\dots(m+1)} \dots (2).$$

Ora nelle due ultime serie vediamo che i loro primi e secondi termini sono eguali, ma il terzo termine in (2) è maggiore del terzo termine in (1); del pari il quarto termine in (2) è maggiore del quarto termine in (1), e così via; inoltre in (2) vi è un termine di più che in (1). Adunque

$$\left(1+\frac{1}{1+m}\right)^{m+1} \text{ è maggiore di } \left(1+\frac{1}{m}\right)^m.$$

Quindi se poniamo successivamente m eguale a $2, 3, 4$, etc. l'espressione $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ cresce continuamente.

Ma poichè $1-\frac{1}{m}$, $1-\frac{2}{m}$, $1-\frac{3}{m}$, etc. sono tutti positivi e tutti minori dell'unità ne segue che la serie in (1) non può essere maggiore di

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}+\dots+\frac{1}{1.2\dots m}\dots\dots(3),$$

comunque grande sia m.

Ma la serie in (3) è minore della progressione geometrica

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\dots+\frac{1}{2^{m-1}},$$

vale a dire, minore di

$$1+\frac{1-\frac{1}{2^m}}{1-\frac{1}{2}} \text{ o } 3-\frac{1}{2^{m-1}}.$$

Quindi $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ è minore di 3, comunque grande sia m.

Adunque poichè l'espressione $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ cresce continuamente con m, ma nello stesso tempo non può eccedere 3, vi deve essere un «limite» verso il quale essa si avvicina a misura che m cresce indefinitamente. Adopreremo il simbolo e per dinotare questo limite, e mostreremo in seguito come calcolare il suo valore approssimato: diciamo *approssimato*, poichè si dimostrerà essere un numero incommensurabile. Si vegga l'Art. 115.

16. Potremmo forse lasciare allo studente il convincersi che il valore limite di $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ debba essere lo stesso sia che si attribuisca ad x una successione di valori *interi* o pure *frazionari* crescenti senza limite. Ma può essere formalmente dimostrato nel seguente modo. Qualunque sia il valore frazionario assegnato ad x vi debbono essere due interi consecutivi, supponiamo m ed $m+1$, tra i quali giace quel valore frazio-

nario. Sia adunque $1+\frac{1}{x}$ maggiore di $1+\frac{1}{n}$ e minore di $1+\frac{1}{m}$, in cui n è messo per $m+1$.

Laonde $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ giace tra $\left(1+\frac{1}{n}\right)^x$ ed $\left(1+\frac{1}{m}\right)^x$.

Si supponga $x=m+\alpha=n-\beta$, così che α e β sono frazioni proprie, quindi

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \text{ giace tra } \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-\beta} \text{ed} \left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+\alpha},$$

vale a dire, tra

$$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}^{1-\frac{\beta}{n}} \text{ ed } \left\{\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right\}^{1+\frac{\alpha}{m}}.$$

Se ora si suppone x crescere senza limite, avverrà lo stesso per m ed n. Il limite di $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ e di $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ è e, e siccome $1-\frac{\beta}{n}$ ed $1+\frac{\alpha}{m}$ hanno l'unità per loro limite ne segue che il limite di $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ è e.

17. Possiamo mostrare che il limite di $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ è anche e quando x è *negativo* e cresce senza limite. Infatti posto $x=-z$, dovremo trovare il limite di $\left(1-\frac{1}{z}\right)^{-z}$ quando z cresce senza limite.

Ora
$$\left(1-\frac{1}{z}\right)^{-z}=\left(\frac{z-1}{z}\right)^{-z}=\left(\frac{z}{z-1}\right)^z,$$
$$=\left(\frac{1+y}{y}\right)^{y+1}, \text{ in cui } y=z-1,$$
$$=\left\{\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\right\}^{1+\frac{1}{y}}.$$

Cresca adesso x numericamente senza limite, z, e per conseguenza y, faranno lo stesso. Il limite di $\left(1+\frac{1}{y}\right)^y$ è e, e quello di $1+\frac{1}{y}$ è l'unità, quindi il limite di $\left(1-\frac{1}{z}\right)^{-z}$ è e.

18. Poichè il limite di $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ allorchè x cresce indefinitamente è e, si vede, ponendo $\frac{1}{x}=z$, che il limite di $(1+z)^{\frac{1}{z}}$ quando z *diminuisce* indefinitamente è anche e. Possiamo quindi dedurre il limite per $z=0$ di $(1+az)^{\frac{1}{z}}$, in cui a è una quantità costante qualunque. Infatti

$$(1+az)^{\frac{1}{z}}=\left\{(1+az)^{\frac{1}{az}}\right\}^a.$$

Ora a misura che z diminuisce senza limite, accade lo stesso per az, quindi

$$\text{limite di } (1+az)^{\frac{1}{az}} \text{ è } e,$$

e

$$\text{limite di } (1+az)^{\frac{1}{z}} \text{ è } e^a.$$

19. Poichè $$\log_a(1+z)^{\frac{1}{z}}=\frac{1}{z}\log_a(1+z),$$

a essendo una base qualunque, sarà, diminuendo z indefinitamente,

$$\text{limite di } \frac{\log_a(1+z)}{z}=\text{limite di } \log_a(1+z)^{\frac{1}{z}},$$
$$=\log_a e;$$

e, ponendo e per a,

$$\text{limite di } \frac{\log_e(1+z)}{z}=1.$$

20. Dall'equazione

$$\log_a(1+z)^{\frac{1}{z}}=\frac{\log_a(1+z)}{z},$$

deduciamo, ponendo $1+z=a^v$,

$$\log_a(1+z)^{\frac{1}{z}}=\frac{v}{a^v-1}.$$

Si supponga ora z diminuire senza limite, e quindi anche v. Avremo

$$\text{limite di } \frac{v}{a^v-1} \text{ per } v=0,$$
$$=\text{limite di } \log_a(1+z)^{\frac{1}{z}} \text{ per } z=0,$$
$$= \log_a e.$$

Quindi limite di $\frac{a^v - 1}{v}$ per $v = 0$,

$$= \frac{1}{\log_a e},$$

$$= \log_e a.$$

Si supponga $a = e^{\mu}$,

onde $\mu = \log_e a$

e limite di $\frac{e^{\mu v} - 1}{v}$ per $v = 0$, $= \mu$.

21. I risultati seguenti si troveranno nelle opere sulla Trigonometria. Se la variabile x diminuisce indefinitamente

$$\text{limite di } \frac{\tan x}{x} = 1,$$

$$\text{limite di } \frac{\text{sen}^{-1} x}{x} = 1,$$

$$\text{limite di } \frac{\tan^{-1} x}{x} = 1.$$

22. Alcune poche osservazioni generali si possono fare nel chiudere questo Capitolo d'Introduzione. Accade spesso che colui il quale intraprende questi studi si perdi di animo dal bel principio poichè egli non sa scoprire o immaginare alcuna applicazione pratica dei punti alquanto astrusi su'quali la sua attenzione è diretta. Da ciò che egli rammenta delle parti precedenti di quei rami delle matematiche di cui ha già cognizione, egli è condotto ad aspettarsi non appena incominciato il Calcolo Differenziale di poter comprendere il suo scopo generale, e di adoperarlo per risolvere problemi algebrici e geometrici; e rimanendo deluso in questa aspettativa, egli crede poter ragionevolmente supporre di non aver inteso a dovere i principii elementari del soggetto. Gioverà quindi a rassicurarlo, che la difficoltà della quale si lamenta probabilmente è dovuta più alla natura del soggetto che alla sua propria mancanza di penetrazione. Lo studente deve, per il meglio, lasciare al suo istitutore la cura di ordinare le diverse parti del soggetto che egli studia, e di scegliere

le definizioni necessarie ad essere compreso; e nel leggere un'opera sul Calcolo Differenziale, egli deve a principio contentarsi di riflettere sul significato delle definizioni, e di esaminare se le deduzioni tratte dallo scrittore da queste definizioni sono esatte. Vi sono innumerevoli applicazioni dei principii elementari del Calcolo Differenziale, come si vedrà nel Capitolo sugli Sviluppi e nei seguenti, ma da principio ci limiteremo semplicemente all'esercizio logico di tracciare le conseguenze di alcune definizioni.

Una difficoltà di più grave natura relativa alla nozione del limite, sembra imbarazzare molti studenti su questa materia, cioè, il sospetto che i metodi impiegati siano solamente approssimativi, e quindi il dubbio se i risultati siano assolutamente veri. Questa obiezione è certamente molto naturale, ma nello stesso tempo in verun modo facile ad essere affrontata, non essendo al caso il lettore d'indicare qualche punto preciso in cui la sua incertezza incomincia. In tale circostanza tutto ciò che egli può fare si è, di fissare la sua attenzione con molta cura su qualche parte della dottrina, sulla teoria degli sviluppi per esempio, in cui si ottengono formole speciali importanti. Egli esaminerà le dimostrazioni, e se non può scoprire alcun lato debole in esse, dovrà confessare che risultati *assolutamente veri e liberi da ogni approssimazione* possono legittimamente essere dedotti dalla dottrina dei Limiti.

23. La dimostrazione negli Art. 15, 16 della proposizione che $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ tende ad un limite fisso a misura che x cresce indefinitamente, è stata data in varie opere sul Calcolo Differenziale, e nello stesso modo è stata qui riportata. Ma il metodo seguente, nel quale non si assume il Teorema del Binomio, merita di esser notato.

Se m è un intero positivo, allora, con la divisione effettiva,

$$\frac{(1+\alpha)^m-1}{1+\alpha-1}=(1+\alpha)^{m-1}+(1+\alpha)^{m-2}+(1+\alpha)^{m-3}+\ldots+1;$$

onde $(1+\alpha)^m-1$ è $>m\alpha$,

ed è $<m\alpha(1+\alpha)^{m-1}$;

quindi $(1+\alpha)^m$ è $>m\alpha+1$ .... (1),

ed $$(1+\alpha)^m \text{ è } < 1+m\alpha(1+\alpha)^{m-1} \ldots\ldots (2).$$

Da (2) segue, *a fortiori*, che

$$(1+\alpha)^m \text{ è } < 1+m\alpha(1+\alpha)^m \ldots\ldots\ldots\ldots (3);$$

quindi $$(1+\alpha)^m \text{ è } < \frac{1}{1-m\alpha} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4),$$

supponendo $m\alpha < 1$.

In (1) si ponga $\frac{\beta}{m}$ per α, e si estragga la radice m^{ma} da ambo i membri dell'eguaglianza; con ciò

$$1+\frac{\beta}{m} \text{ è } > (1+\beta)^{\frac{1}{m}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5).$$

In (4) si ponga $\frac{\beta}{m(\beta+1)}$ per α; allora

$$(1+\alpha)^m \text{ è } < 1+\beta,$$

quindi $$1+\frac{\beta}{m(\beta+1)} \text{ è } < (1+\beta)^{\frac{1}{m}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6).$$

Si elevino i duo lati di (6) all'n^{ma} potenza; allora

$$(1+\beta)^{\frac{n}{m}} \text{ è } > \left\{1+\frac{\beta}{m(\beta+1)}\right\}^n,$$

e quindi per (1) $$> 1+\frac{n}{m}\frac{\beta}{\beta+1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7).$$

Si elevino i due lati di (5) all'n^{ma} potenza, e si avrà

$$(1+\beta)^{\frac{n}{m}} < \left(1+\frac{\beta}{m}\right)^n;$$

onde per (4) $$< \frac{1}{1-\frac{n\beta}{m}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8),$$

supponendo $\frac{n\beta}{m} < 1$.

In (7) ed (8) si ponga μ per $\frac{n}{m}$, e verrà

$$(1+\beta)^{\mu} > 1 + \mu\frac{\beta}{1+\beta} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (9),$$

$$(1+\beta)^{\mu} < \frac{1}{1-\mu\beta} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (10),$$

in cui μ è una frazione positiva qualunque, ed in (10) $\mu\beta$ è <1.

Si moltiplichino ambo i lati di (9) per $1+\beta$; con ciò

$$(1+\beta)^{\mu+1} > 1 + (\mu+1)\beta,$$

o sia, ponendo λ per $\mu+1$,

$$(1+\beta)^{\lambda} > 1 + \lambda\beta \dots\dots\dots\dots\dots\dots (11).$$

Così l'ineguaglianza in (1), la quale richiedeva che m fosse un intero positivo, è quì estesa, poichè λ può essere una frazione o un intero qualunque, purchè sia maggiore dell' unità.

In (11) si ponga $\beta = \frac{1}{\lambda\gamma}$, e si elevino i due lati alla potenza γ; allora

$$\left(1+\frac{1}{\lambda\gamma}\right)^{\lambda\gamma} \text{ è } > \left(1+\frac{1}{\gamma}\right)^{\gamma};$$

vale a dire, se δ sia $>\gamma$,

$$\left(1+\frac{1}{\delta}\right)^{\delta} \text{ è } > \left(1+\frac{1}{\gamma}\right)^{\gamma} \dots\dots\dots\dots (12).$$

Da (12) vediamo che $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$ cresce continuamente col crescere di x. Esso, però, non oltrepassa un certo limite finito; infatti in (10) si scriva $\frac{1}{\mu\gamma}$ per β, e si elevino ambo i lati alla potenza γ; allora

$$\left(1+\frac{1}{\mu\gamma}\right)^{\mu\gamma} \text{ è } < \frac{1}{\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)^{\gamma}} \text{ se } \gamma \text{ sia } > 1.$$

Laonde, se poniamo $\gamma=2$, troviamo che $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$ non può mai eccedere 4. Attribuendo a γ valori più grandi, otterremo

un limite più vicino per $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$. Se $\gamma = 6$, vediamo che $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ deve essere minore di $\left(\frac{6}{5}\right)^6$, quindi minore di 3. Poichè dunque il limite di $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$, a misura che x cresce indefinitamente, deve giacere tra

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \text{ ed } \left(\frac{n}{n-1}\right)^n,$$

in cui n ha un valore positivo qualunque, possiamo, assegnando ad n valori interi successivi, facilmente approssimarci al valore numerico del limite.

CAPITOLO II.

DEFINIZIONE DEL COEFFICIENTE DIFFERENZIALE. COEFFICIENTE DIFFERENZIALE DI UNA SOMMA, UN PRODOTTO, ED UN QUOZIENTE.

24. Esporremo ora la definizione fondamentale del Calcolo Differenziale, e dedurremo da essa varie conseguenze.

Def. Dinoti $\varphi(x)$ una funzione qualunque di x, e $\varphi(x+h)$ la stessa funzione di $x+h$; allora il valore limite di $\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}$, quando h diviene infinitamente piccolo, si dice il coefficiente differenziale di $\varphi(x)$ rispetto ad x.

Questa definizione assume che la frazione precedente realmente *abbia un limite*. Parlando a rigore, dovremmo usare un enunciato della forma seguente — « Se $\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}$ ha un limite quando h diviene infinitamente piccolo, questo limite si chiama il coefficiente differenziale di $\varphi(x)$ rispetto ad x. » Mostreremo, però, che il limite esiste nelle funzioni di ogni sorta, esaminandole dettagliatamente in questo e nei due Capitoli seguenti. Diamo due esempii ad oggetto di chiarire la definizione.

Sia $\varphi(x)=x^2$;

onde $\varphi(x+h)=(x+h)^2$;

$$\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}=\frac{(x+h)^2-x^2}{h}$$

$$=\frac{2xh+h^2}{h}=2x+h,$$

ed il limite di $2x+h$ quando $h=0$, è $2x$; adunque $2x$ è il coefficiente differenziale di x^2 rispetto ad x.

Sia, in secondo luogo $\varphi(x)=\frac{a}{b+x}$;

onde $$\varphi(x+h)=\frac{a}{b+x+h},$$

e quindi $$\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}=-\frac{a}{(b+x)(b+x+h)}.$$

Il limite di questa espressione quando $h=0$ è

$$-\frac{a}{(b+x)^2},$$

il quale è adunque il coefficiente differenziale di $\frac{a}{b+x}$ rispetto ad x.

25. Diamo ora la notazione che usualmente accompagna la definizione nell'Art. 24.

Sia $\varphi(x)=y$, allora $\varphi(x+h)-\varphi(x)$ è la *differenza* dei due valori della variabile dipendente y corrispondenti ai due valori, x ed $x+h$, della variabile indipendente. Questa differenza può convenientemente essere dinotata dal simbolo Δy, in cui Δ può essere preso come un'abbreviazione della parola *differenza*. Abbiamo così

$$\Delta y=\varphi(x+h)-\varphi(x).$$

Conformemente a questa notazione, h può essere dinotato con Δx, sicchè

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}.$$

Può sembrare una superfluità di notazione l'usare h e Δx per dinotare la stessa cosa, ma nel trovare il limite del secondo membro dovremo alle volte eseguire varie trasformazioni analitiche, e così una sola lettera è più conveniente. Nel primo membro Δx si raccomanda in considerazione della simmetria.

Diciamo adunque, secondo la definizione nell'Art. 24, che il limite di $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, quando Δx diminuisce indefinitamente, è il coefficiente differenziale di y o $\varphi(x)$ rispetto ad x. *Questo limite è dinotato dal simbolo* $\frac{dy}{dx}$.

26. Noi consideriamo il simbolo $\frac{dy}{dx}$ siccome un *tutto*, e non diamo un significato separato a dy e dx. Intanto, siccome $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ è un'effettiva frazione nella quale Δy e Δx hanno significati definiti, lo studente facilissimamente sospetterà che qualche significato possa darsi a dy e dx il quale lo abiliterà a riguardare $\frac{dy}{dx}$ come una frazione. Questo sospetto probabilmente acquisterà maggior forza a misura che egli procede innanzi nella materia e trova che in molti casi $\frac{dy}{dx}$ possiedo le proprietà di una frazione algebrica. Osserviamo che vi sono in vero metodi di trattaro il Calcolo Differenziale nei quali si danno dei significati a dy e dx, e ricorreremo ad essi in seguito (si vegga il Cap. XXVII.), ma per ora noi definiamo il simbolo $\frac{dy}{dx}$ come sopra, e solamente lasciamo al lettore l'incarico di esaminare se siamo conseguenti con noi stessi nelle deduzioni che procediamo a trarre ed esprimere per mezzo delle nostre definizioni e dei nostri simboli.

La seguente notazione è anche frequentemente adoperata. Se $\varphi(x)$ dinota una funzione qualunque di x, allora $\varphi'(x)$ dinota il coefficiente differenziale di $\varphi(x)$ rispetto ad x.

L'operazione di trovare il coefficiente differenziale di una funzione è detta « differenziare » questa funzione.

27. *Coefficiente differenziale di una somma di Funzioni.*

Dinotino y e z due funzioni di x, ed u la loro somma. Supponiamo che y', z', u', dinotino i valori che prendono queste funzioni quando x si cambia in $x+h$. Allora

$$u=y+z,$$

$$u'=y'+z',$$

onde
$$u'-u=y'-y+z'-z;$$

o sia
$$\Delta u=\Delta y+\Delta z.$$

Si divida per h o Δx, allora

$$\frac{\Delta u}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta x}+\frac{\Delta z}{\Delta x}.$$

Diminuisca ora h senza limite, ed avremo

$$\frac{du}{dx}=\frac{dy}{dx}+\frac{dz}{dx}.$$

Adunque *il coefficiente differenziale della somma di due funzioni è la somma dei coefficienti differenziali delle funzioni.*

Similmente, se

$$u=y-z,$$

$$\frac{du}{dx}=\frac{dy}{dx}-\frac{dz}{dx}.$$

28. Il risultato dell'Art. 27 può essere esteso al caso di un numero qualunque di funzioni unite con i segni di addizione o sottrazione. Per esempio, sia

$$u=w+y+z,$$

allora, come sopra, $\Delta u=\Delta w+\Delta y+\Delta z$;

onde $$\frac{\Delta u}{\Delta x}=\frac{\Delta w}{\Delta x}+\frac{\Delta y}{\Delta x}+\frac{\Delta z}{\Delta x};$$

quindi, passando al limite,

$$\frac{du}{dx}=\frac{dw}{dx}+\frac{dy}{dx}+\frac{dz}{dx}.$$

29. *Coefficiente differenziale del prodotto di due Funzioni.*

Dinotino $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ due funzioni di x, e sia

$$u=\varphi(x)\psi(x).$$

Si muti x in $x+h$, e dinoti $u+\Delta u$ il nuovo prodotto, allora $$u+\Delta u=\varphi(x+h)\psi(x+h),$$

onde $$\Delta u=\varphi(x+h)\psi(x+h)-\varphi(x)\psi(x),$$

$$=\{\varphi(x+h)-\varphi(x)\}\ \psi(x+h)+\varphi(x)\ \{\psi(x+h)-\psi(x)\};$$

quindi $$\frac{\Delta u}{\Delta x}=\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}\psi(x+h)+\frac{\psi(x+h)-\psi(x)}{h}\varphi(x).$$

Ora supponiamo h diminuire indefinitamente; allora

$$\text{limite di }\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}$$

è il coefficiente differenziale di $\varphi(x)$ rispetto ad x, o $\varphi'(x)$;

$$\text{limite di } \frac{\psi(x+h)-\psi(x)}{h}$$

è il coefficiente differenziale di $\psi(x)$ rispetto ad x, o $\psi'(x)$;

$$\text{limite di } \psi(x+h) \text{ è } \psi(x);$$

quindi
$$\frac{du}{dx} = \varphi'(x)\psi(x) + \psi'(x)\varphi(x).$$

Adunque *il coefficiente differenziale del prodotto di due funzioni si trova moltiplicando ciascun fattore per il coefficiente differenziale dell'altro fattore ed addizionando i prodotti risultanti.*

Si divida ciascun membro dell'ultimo risultato per u o $\varphi(x)\psi(x)$; sarà

$$\frac{1}{u}\frac{du}{dx} = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} + \frac{\psi'(x)}{\psi(x)}.$$

30. Un'equazione simile a quella testè ottenuta vale pel prodotto di un numero qualunque di funzioni. Per esempio, sia

$$u = wyz,$$

w, y, z essendo tutte funzioni di x.

Si prenda $v = wy$,

onde $u = vz$;

allora, per l'Art. 29,

$$\frac{1}{u}\frac{du}{dx} = \frac{1}{v}\frac{dv}{dx} + \frac{1}{z}\frac{dz}{dx};$$

del pari
$$\frac{1}{v}\frac{dv}{dx} = \frac{1}{w}\frac{dw}{dx} + \frac{1}{y}\frac{dy}{dx};$$

onde
$$\frac{1}{u}\frac{du}{dx} = \frac{1}{w}\frac{dw}{dx} + \frac{1}{y}\frac{dy}{dz} + \frac{1}{z}\frac{dz}{dx};$$

quindi
$$\frac{du}{dx} = yz\frac{dw}{dx} + wz\frac{dy}{dx} + wy\frac{dz}{dx}.$$

Procedendo in questo modo abbiamo la regola — *Il coefficiente differenziale del prodotto di un numero qualunque di funzioni si trova moltiplicando il coefficiente differenziale di ciascun fattore per tutti gli altri fattori ed addizionando i prodotti così ottenuti.*

31. *Coefficiente differenziale di un quoziente.*

Dinotino $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ due funzioni di x, e sia

$$u=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}.$$

Si supponga x mutato in $x+h$, e dinoti $u+\Delta u$ il nuovo valore del quoziente. Allora

$$u+\Delta u=\frac{\varphi(x+h)}{\psi(x+h)},$$

onde
$$\Delta u=\frac{\varphi(x+h)\psi(x)-\varphi(x)\psi(x+h)}{\psi(x+h)\psi(x)}$$

$$=\frac{\{\varphi(x+h)-\varphi(x)\}\psi(x)-\{\psi(x+h)-\psi(x)\}\varphi(x)}{\psi(x+h)\psi(x)};$$

quindi
$$\frac{\Delta u}{\Delta x}=\frac{\dfrac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}\,\psi(x)-\dfrac{\psi(x+h)-\psi(x)}{h}\,\varphi(x)}{\psi(x+h)\psi(x)}.$$

Diminuisca h senza limite, allora

$$\frac{du}{dx}=\frac{\varphi'(x)\psi(x)-\psi'(x)\varphi(x)}{\{\psi(x)\}^2}.$$

Adunque abbiamo questa regola — *Per trovare il coefficiente differenziale di un quoziente; si moltiplichi il denominatore pel coefficiente differenziale del numeratore ed il numeratore pel coefficiente differenziale del denominatore; si sottragga il secondo prodotto dal primo e si divida il risultato pel quadrato del denominatore.*

32. Il risultato dell'Art. 31 può anche ottenersi nel seguente modo:

Essendo
$$u=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)},$$

onde
$$\varphi(x)=u\psi(x);$$

sarà, per l'Art. 29.

$$\varphi'(x)=\frac{du}{dx}\psi(x)+u\psi'(x);$$

onde
$$\psi(x)\frac{du}{dx}=\varphi'(x)-\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\psi'(x),$$

quindi
$$\frac{du}{dx}=\frac{\varphi'(x)\psi(x)-\psi'(x)\varphi(x)}{\{\psi(x)\}^2}.$$

33. *Differenziazione di una costante.*

Se $y=c$ in cui c è una costante, allora $\frac{dy}{dx}=0$. Infatti dire che y sia eguale ad una costante equivale a dire che y non possa variare; da ciò $\Delta y=0$, onde

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=0$$

qualunque sia il valore di Δx; quindi

$$\frac{dy}{dx}=0.$$

Adunque, facendo $\varphi(x)=$ad una costante c nell'Art. 29, abbiamo

$$\frac{dc\psi(x)}{dx}=c\psi'(x).$$

Del resto si può ottenere ciò direttamente come segue: sia

$$u=c\psi(x),$$

allora $$u+\Delta u=c\psi(x+h);$$

onde $$\frac{\Delta u}{\Delta x}=c\frac{\psi(x+h)-\psi(x)}{h},$$

quindi $$\frac{du}{dx}=c\psi'(x).$$

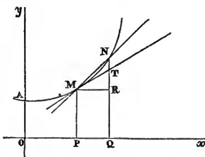
Similmente ponendo $\varphi(x)=c$ nell'Art. 31, abbiamo

$$\frac{d\dfrac{c}{\psi(x)}}{dx}=-\frac{c\psi'(x)}{\{\psi(x)\}^2},$$

il che può anche essere trovato indipendentemente.

34. Abbiamo ora definito il coefficiente differenziale ed abbiamo mostrato come possa trovarsi il coefficiente differenziale di una funzione composta allorchè conosciamo i coefficienti differenziali delle funzioni componenti. Prima di procedere alle regole per determinare il coefficiente differenziale di una qualunque data espressione algebrica, daremo alcune illustrazioni geometriche le quali saranno di aiuto nella formazione del concetto del significato del coefficiente differenziale e somministreranno alcuni cenni intorno alle applicazioni che possono farsi della dottrina dei limiti.

35. Supponiamo data l'equaziono $y = \varphi(x)$, si attribuiscano alla variabile indipendente x tutt'i possibili valori tra $-\infty$ e $+\infty$ e si notino i valori corrispondenti di y. La Geometria ci dà il mezzo di rappresentare distintamento questa successione di valori. Possiamo prendere x per un'ascissa misurata da un'origine fissa lungo un certo asse, ed y per la corrispondente ordinata misurata lungo un asse perpendicolare al primo. I valori di y corrispondenti a quelli di x nell'equazione $y = \varphi(x)$ apparterranno ad una curva AMN, la forma della quale indicherà la serie dei valori che stiamo considerando. È necessario di avere sempre presente nella nostra mente non già un valore particolare di x ed il valore corrispondente di y, ma l'intera serie dei valori corrispondenti di queste due variabili.



36. Tra le proprietà della funzione $\varphi(x)$, o della linea che la rappresenta, la più rimarchevole, quella in fatti che forma l'oggetto del calcolo differenziale o che occorre continuamente di considerare in tutte le applicazioni di questo calcolo, è *il grado di rapidità col quale la funzione varia quando la variabile incomincia a variare da un valore assegnato qualunque*. Il grado di rapidità dell'accrescimento della funzione quando la variabile aumenta può differire non solamente nelle diverse funzioni ma anche nella stessa funzione secondo il valore attribuito alla variabile dal quale si suppone incominciare l'aumento. Supponiamo che si dia ad x un valore particolare dinotato da OP, al quale corrisponde un determinato valore di y o $\varphi(x)$ rappresentato da MP. Cresca x, a partire dal valore assegnato, di una quantità che dinotiamo con Δx, ed è rappresentata da PQ. La funzione y varierà in conseguenza di una certa quantità che dinotiamo con Δy, sicchè

$$y + \Delta y = \varphi(x + \Delta x),$$

onde

$$\Delta y = \varphi(x + \Delta x) - \varphi(x).$$

Il nuovo valore dell'ordinata è rappresentato nella figura da NQ, ed NR rappresenta Δy. La frazione $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ rappresenta il rapporto dell'accrescimento della funzione all'accrescimento della variabile, ed è eguale alla tangente trigonometrica dell'angolo NMR formato dalla tangente MN con l'asse delle x.

37. È chiaro che questa frazione è una naturale misura del grado di rapidità col quale cresce la funzione y allorchè la variabile indipendente x aumenta; poichè quanto più grande è tale frazione, tanto maggiore sarà l'accrescimento della funzione y corrispondente al dato aumento Δx della variabile. Ma è importante l'osservare che il valore di $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ dipenderà non solamente dal valore dato ad x, *ma ancora dalla grandezza dell'incremento* Δx, eccettuato il caso in cui la curva diviene una linea retta.

Se dunque noi lasciamo questo incremento arbitrario, sarà impossibile assegnare alla frazione $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ alcun valore definito, ed è quindi necessario di adottare qualche convenzione che valga a rimuovere questa incertezza.

38. Supponiamo che dopo di aver dato a Δx un certo valore, al quale corrisponderà un certo valore per Δy ed una certa direzione per la segante MN, si faccia diminuire gradatamente il valore di Δx sino a che diventi zero. Il valore di Δy diminuirà anche gradatamente e diverrà finalmente zero. Il punto N si muoverà lungo la curva verso M, e troveremo *in ogni esempio che si consideri, che la retta MN si avvicinerà verso una posizione limite MT.* Ciò è in effetti equivalente all'asserzione contenuta nell'Art. 24, che esaminando ogni caso dettagliatamente potremmo mostrare come ogni funzione abbia un coefficiente differenziale. La posizione limite della segante quando N coincide con M si dice *la tangente della curva nel punto M*, e così $\frac{dy}{dx}$ è la tangente trigonometrica dell'inclinazione della retta tangente della curva all'asse delle x.

39. Il limite della frazione $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, quando Δx diminuisce indefinitamente, si può considerare come una misura precisa della rapidità con la quale la funzione cresce allorchè la variabile indipendente aumenta, poichè non vi rimane più nulla di arbitrario nell'espressione. Il limite $\frac{dy}{dx}$ non dipende dal valore assegnato a Δx nè dalla forma della curva ad una distanza finita dal punto di cui le coordinate sono x ed y; esso dipende solamente dalla *direzione* della curva in questo punto, vale a dire, dall'inclinazione della retta tangente all'asse delle x.

40. Come un esempio di ciò che precede, determineremo il coefficiente differenziale di $\sqrt{(a^2-x^2)}$, e ne daremo la sua applicazione geometrica.

Sia $y=\sqrt{(a^2-x^2)}$,

allora $y+\Delta y=\sqrt{\{a^2-(x+h)^2\}}$;

onde
$$\Delta y=\sqrt{\{a^2-(x+h)^2\}}-\sqrt{(a^2-x^2)},$$
$$=\frac{x^2-(x+h)^2}{\sqrt{\{a^2-(x+h)^2\}}+\sqrt{(a^2-x^2)}},$$
$$=\frac{-(2xh+h^2)}{\sqrt{\{a^2-(x+h)^2\}}+\sqrt{(a^2-x^2)}};$$

quindi
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{2x+h}{\sqrt{\{a^2-(x+h)^2\}}+\sqrt{(a^2-x^2)}}.$$

Il limite di questa espressione allorchè h diviene infinitamente piccolo è
$$-\frac{x}{\sqrt{(a^2-x^2)}};$$

adunque
$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{\sqrt{(a^2-x^2)}}.$$

Si vedrà che nell'esempio precedente abbiamo adoperato un artificio algebrico, cioè di moltiplicare il numeratore ed il denominatore di una frazione per $\sqrt{\{a^2-(x+h)^2\}}+\sqrt{(a^2-x^2)}$, allo scopo di ottenere $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ in una forma di cui si possa con

facilità vedere il limite. Nel trattare un esempio qualunque senza l'aiuto di regole generali, troveremmo sovente dipendere la nostra riuscita dalla nostra speditezza nell'effettuare simili trasformazioni; ma nei due prossimi capitoli si spiegheranno metodi per far dipendere la ricerca di un coefficiente differenziale qualunque dalla conoscenza di quelli di poche funzioni fondamentali.

41. Dalla geometria analitica conosciamo che l'equazione $y=\sqrt{(a^2-x^2)}$ rappresenta un cerchio, ed è altresì conosciuto per i principii su questo soggetto che la tangente nel punto (x,y) di un cerchio è inclinata all'asse delle x sotto un angolo di cui la tangente trigonometrica è $-\frac{x}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$. Inoltre nel caso del cerchio la retta che abbiamo definita come la tangente è la stessa retta che soddisfa alla condizione di « toccare il cerchio » data in *Euclide*, Libro III.

42. Nei capitoli sulle applicazioni geometriche del calcolo differenziale ricorreremo al soggetto delle tangenti. Abbiamo dato quì l'esempio precedente affinchè lo studente possa dal bel principio acquistare la convinzione che importanti usi si possono fare del coefficiente differenziale.

43. La seguente è un'altra applicazione geometrica. L'area $OAMP$, (si vegga la fig. all'Art. 35), deve essere *una qualche* funzione di x, poichè essa è una quantità definita allorchè si assegna un valore definito ad x, e varia quando x varia. Si dinoti questa funzione con u, e PQ con Δx; allora

$$u+\Delta u=\text{area } OANQ,$$

onde $$\Delta u=\text{area } MNQP;$$

quindi $$\Delta u \text{ giace tra } MP.PQ \text{ ed } NQ.PQ,$$

cioè, tra $$y\,\Delta x \text{ ed } (y+\Delta y)\,\Delta x;$$

onde $$\frac{\Delta u}{\Delta x} \text{ giace tra } y \text{ ed } y+\Delta y.$$

Quindi, diminuendo Δx, e per conseguenza Δy, senza limite, abbiamo

$$\frac{du}{dx}=y.$$

CAPITOLO III.

COEFFICIENTI DIFFERENZIALI DELLE FUNZIONI SEMPLICI.

44. *Coefficiente differenziale di x^n in cui n è un intero positivo.*

Sia $y=x^n$, onde

$$y+\Delta y=(x+h)^n,$$

$$\Delta y=(x+h)^n-x^n,$$

$$=nx^{n-1}h+\frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}h^2+\ldots+h^n;$$

quindi $$\frac{\Delta y}{\Delta x}=nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}h+\ldots+h^{n-1}.$$

Diminuisca h senza limite, e si avrà

$$\frac{dy}{dx}=nx^{n-1}.$$

45. Lo stesso risultato può anche ottenersi per mezzo dell'Art. 30. Infatti sia

$$u=y_1\cdot y_2\cdots y_n,$$

in cui le n quantità $y_1, y_2, \ldots y_n$, sono tutte funzioni di x; abbiamo allora

$$\frac{1}{u}\frac{du}{dx}=\frac{1}{y_1}\frac{dy_1}{dx}+\frac{1}{y_2}\frac{dy_2}{dx}+\ldots+\frac{1}{y_n}\frac{dy_n}{dx}.$$

Se ora $y_1=x$, si ha

$$\Delta y_1=\Delta x,$$

onde $$\frac{\Delta y_1}{\Delta x}=1,$$

quindi $$\frac{dy_1}{dx}=1.$$

Si pongano adunque $y_1, y_2, \dots y_n$, tutte eguali ad x; con ciò u diviene x^n, ed otteniamo

$$\frac{1}{u}\frac{du}{dx}=\frac{n}{x},$$

quindi
$$\frac{du}{dx}=nx^{n-1}.$$

46. Se n non è un intero positivo, ammettendo la verità della serie binomiale per gli esponenti frazionari possiamo procedere come nell'Art. 44 per determinare $\frac{dx^n}{dx}$. Ma in questo caso dovremo richiedere di ammettere che « se si ha una serie di un numero infinito di termini e ciascun termine diviene ultimamente indefinitamente piccolo, la somma dei termini diviene ancora tale ». Per evitare di ammettere ciò adottiamo un altro modo.

47. *Coefficiente differenziale di* x^n, essendo n qualunque.

Sia $y=x^n$, onde

$$y+\Delta y=(x+h)^n,$$

quindi
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(x+h)^n-x^n}{h}$$
$$=x^n\frac{\left(\frac{x+h}{x}\right)^n-1}{h}.$$

Ora qualunque sia il valore di n, positivo o negativo, intero o frazionario, si può suppore $=\frac{p-q}{r}$, in cui p, q, r, sono interi positivi.

Sia
$$\frac{x+h}{x}=z,$$

onde
$$h=x(z-1),$$

e
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=x^{n-1}\frac{z^n-1}{z-1}.$$

A misura che h diminuisce indefinitamente z si avvicina al limite 1, e dobbiamo trovare in questo caso il limite di

$$\frac{z^n-1}{z-1}.$$

Si supponga $v = z^{\frac{1}{r}}$, allora

$$\frac{z^n - 1}{z - 1} \text{ o } \frac{z^{\frac{p-q}{r}} - 1}{z - 1} = \frac{v^{p-q} - 1}{v^r - 1} = \frac{v^p - v^q}{v^q (v^r - 1)}$$

$$= \frac{v^p - 1 - (v^q - 1)}{v^q (v^r - 1)}$$

$$= \frac{v^{p-1} + v^{p-2} + \ldots + 1 - (v^{q-1} + v^{q-2} + \ldots + 1)}{v^q (v^{r-1} + v^{r-2} + \ldots + 1)}.$$

L'ultimo risultato si è ottenuto dividendo il numeratore ed il denominatore della frazione precedente per $v - 1$. Si avvicini ora v al limite 1, allora il limite dell'ultima frazione è

$$\frac{p - q}{r},$$

quindi $$\frac{dy}{dx} = \frac{p - q}{r} x^{n-1} = n x^{n-1}.$$

*48. *Coefficiente differenziale di* x^n con un altro metodo.

Sia $y = x^n$, onde

$$y + \Delta y = (x + h)^n,$$

quindi $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x + h)^n - x^n}{h},$$

$$= \frac{x^n}{h} \left\{ \left(1 + \frac{h}{x}\right)^n - 1 \right\}.$$

Si ponga $\frac{h}{x} = z$ ed $(1 + z)^n - 1 = v$, allora z e v sono quantità che diminuiscono indefinitamente con h. Con ciò

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = x^{n-1} \frac{v}{z}.$$

Dalle supposizioni precedenti

$$(1 + z)^n = 1 + v,$$

onde $$\log_e (1 + v) = n \log_e (1 + z).$$

Dall'Art. 19 le espressioni

$$\frac{\log_e(1+z)}{z} \text{ e } \frac{\log_e(1+v)}{v}$$

tendono entrambe al limite l'unità. Quindi possiamo supporre

$$\frac{\log_e(1+v)}{v} = 1+\gamma,$$

$$\frac{\log_e(1+z)}{z} = 1+\delta,$$

in cui ciascuna delle quantità γ e δ ha zero per suo limite. Laonde

$$\frac{v}{z} = \frac{1+\delta}{1+\gamma} \cdot \frac{\log_e(1+v)}{\log_e(1+z)}$$

$$= n\frac{1+\delta}{1+\gamma} \text{ per le formole precedenti;}$$

adunque il limite di $\frac{v}{z}$ è n, e

$$\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}.$$

49. *Coefficiente differenziale di* a^x.

Sia $y = a^x$, onde

$$y + \Delta y = a^{x+h} = a^x a^h,$$

quindi
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a^x \frac{a^h - 1}{h}.$$

Ora, per l'Art. 20, il limite di

$$\frac{a^h - 1}{h},$$

quando h diminuisce indefinitamente è $\log_e a$; adunque

$$\frac{dy}{dx} = a^x \log_e a.$$

Sia in seguito $y = a^{cx}$; allora

$$y = (a^c)^x;$$

onde per la regola testè dimostrata

$$\frac{dy}{dx} = (a^c)^x \log_e a^c$$
$$= a^{cx} c \log_e a.$$

Quindi se $y = e^{cx}$,

$$\frac{dy}{dx} = ce^{cx};$$

e se

$$y = e^x,$$
$$\frac{dy}{dx} = e^x.$$

50. *Coefficiente differenziale di* $\log_a x$. in luogo di 49

Sia $y = \log_a x$, onde

$$y + \Delta y = \log_a (x + h),$$

quindi

$$\Delta y = \log_a (x + h) - \log_a x$$
$$= \log_a \frac{x + h}{x};$$

laonde

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log_a \frac{x+h}{x}}{h}.$$

Si ponga $h = xz$, onde

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \frac{\log_a (1 + z)}{z}.$$

Per l'Art. 19 il limite di $\frac{\log_a (1 + z)}{z}$ quando z diminuisce indefinitamente è $\log_a e$, quindi

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \log_a e$$
$$= \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\log_e a}.$$

Quindi se $y = \log_e x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}.$$

51. *Coefficiente differenziale di* sen x.

Sia $y = \text{sen}\, x$, onde

$$y + \Delta y = \text{sen}\,(x + h),$$

quindi
$$\Delta y = \text{sen}\,(x + h) - \text{sen}\, x,$$
$$= 2 \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \text{sen}\,\frac{h}{2}, \text{ per la Trigonometria},$$

quindi
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \frac{\text{sen}\,\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}.$$

Ora quando h diminuisce indefinitamente, il limite di $\dfrac{\text{sen}\,\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$ è l'unità per l'Art. 9, dunque

$$\frac{dy}{dx} = \cos x.$$

52. *Coefficiente differenziale di* cos x.

Sia $y = \cos x$, onde

$$y + \Delta y = \cos\,(x + h),$$

quindi
$$\Delta y = \cos\,(x + h) - \cos x$$
$$= -2\,\text{sen}\left(x + \frac{h}{2}\right) \text{sen}\,\frac{h}{2},$$

quindi
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\,\text{sen}\left(x + \frac{h}{2}\right) \frac{\text{sen}\,\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}},$$

quindi
$$\frac{dy}{dx} = -\,\text{sen}\, x.$$

53. *Coefficiente differenziale di* tan x.

Sia $y = \tan x$, onde

$$y + \Delta y = \tan\,(x + h),$$

quindi $$\Delta y = \tan(x+h) - \tan x.$$

$$= \frac{\operatorname{sen}(x+h)}{\cos(x+h)} - \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$



$$= \frac{\operatorname{sen}(x+h-x)}{\cos(x+h)\cos x} = \frac{\operatorname{sen} h}{\cos(x+h)\cos x},$$

quindi $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\operatorname{sen} h}{h} \frac{1}{\cos(x+h)\cos x},$$

quindi $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

54. *Coefficiente differenziale di* $\cot x$.

Procedendo come nell'ultimo esempio, si trova che se

$$y = \cot x,$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}.$$

55. *Coefficiente differenziale di* $\sec x$.

Sia $y = \sec x$, onde

$$y + \Delta y = \sec(x+h)$$

$$\Delta y = \sec(x+h) - \sec x$$

$$= \frac{1}{\cos(x+h)} - \frac{1}{\cos x} = \frac{\cos x - \cos(x+h)}{\cos x \cos(x+h)}$$

$$= \frac{2 \operatorname{sen}\left(x+\frac{h}{2}\right) \operatorname{sen}\frac{h}{2}}{\cos x \cos(x+h)};$$

quindi $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\operatorname{sen}\left(x+\frac{h}{2}\right)}{\cos x \cos(x+h)} \frac{\operatorname{sen}\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}},$$

quindi $$\frac{dy}{dx} = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}.$$

56. *Coefficiente differenziale di* cosec x.

Sia $y = \text{cosec}\, x$; si proceda come nell' ultimo esempio, e si troverà

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\cos x}{\text{sen}^2 x}.$$

57. Poichè $\tan x$, $\cot x$, $\sec x$, e $\text{cosec}\, x$ sono tutte forme frazionarie, noi possiamo dedurre il coefficiente differenziale di ciascuna di queste funzioni per mezzo dell' Art. 31 da quelli di $\text{sen}\, x$ e $\cos x$. Così, sia

$$y = \tan x = \frac{\text{sen}\, x}{\cos x},$$

quindi

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x \dfrac{d\, \text{sen}\, x}{dx} - \text{sen}\, x \cdot \dfrac{d \cos x}{dx}}{\cos^2 x}, \text{ Art. 31},$$

$$= \frac{\cos^2 x + \text{sen}^2 x}{\cos^2 x}, \text{ Art. 51 e 52},$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Similmente possiamo procedere per $\cot x$, $\sec x$ e $\text{cosec}\, x$.

Poichè $\text{vers}\, x = 1 - \cos x$, il coefficiente differenziale di $\text{vers}\, x$, per gli Art. 27 e 33

$$= - \text{il coefficiente differenziale di } \cos x$$

$$= \text{sen}\, x.$$

CAPITOLO IV.

COEFFICIENTI DIFFERENZIALI DELLE FUNZIONI TRIGONOMETRICHE INVERSE E DELLE FUNZIONI COMPLESSE.

58. Sia $y = \varphi(x)$, sicchè y è una nota funzione di x; segue da ciò che x deve essere *una qualche* funzione di y, benchè possiamo non essere al caso di esprimere questa funzione in una forma semplice. Il miglior modo pel lettore di convincersi di ciò sarà di ricorrere alla geometria analitica e di supporre che x od y siano le coordinate di un punto di una curva che ha per equazione $y = \varphi(x)$. Per ogni valore di x vi saranno generalmente uno o più valori di y, positivi o negativi, secondo la circostanza. Del pari per ogni valore di y vi saranno generalmente uno o più definiti valori di x, i quali, siccome essi realmente esistono, possono divenire il soggetto delle nostre investigazioni, anche sebbene il nostro attuale potere di espressioni matematiche non ci fornisca alcun modo semplice di rappresentarli.

59. Un esempio semplice sarà dato dall'equazione

$$y = x^2 - 2x + 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Si risolva questa equazione rispetto ad x, e si avrà

$$x = 1 \pm y^{\frac{1}{2}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Quì (2) mostra che se un valore qualunque si assegna ad y avremo per x uno tra due definiti valori.

Ora in (1), x essendo la variabile indipendente ed y la variabile dipendente, abbiamo per gli Art. 28, 33, e 44,

$$\frac{dy}{dx} = 2x - 2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Nell'equazione (2) possiamo trattare y come la variabile in-

dipendente ed x come la variabile dipendente, e troviamo, per l'Art. 47,

$$\frac{dx}{dy}=\pm\tfrac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4).$$

Da (2) $$x-1=\pm y^{\frac{1}{2}},$$

onde $$\frac{1}{x-1}=\pm y^{-\frac{1}{2}}.$$

Quindi, da (4), $$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{2(x-1)}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5).$$

Paragonando (5) con (3), vediamo che

$$\frac{dy}{dx}\times\frac{dx}{dy}=1.$$

Il teorema ottenuto in questo semplice caso dimostreremo ora di esser vero in generale.

60. *Dimostrare che* $\dfrac{dy}{dx}\times\dfrac{dx}{dy}=1.$

Sia $$y=\varphi(x)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1),$$

poichè da ciò segue che x deve essere *una qualche* funzione di y, si supponga

$$x=\psi(y)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2).$$

Si muti in (1) x in $x+\Delta x$, in conseguenza di che y diviene $y+\Delta y$, onde

$$y+\Delta y=\varphi(x+\Delta x)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3).$$

Ora in (2) può accadere che x *abbia più di un valore* per ogni valore assegnato ad y, ma se il valore di y in (2) è lo stesso che in (1), allora tra i valori che x può avere, *uno deve essere il valore che abbiamo supposto assegnato ad x in* (1). Quindi possiamo supporre x ed y in (2) di avere gli stessi valori che i medesimi simboli hanno rispettivamente in (1). Nell'equazione (2) si muti y in $y+\Delta y$, in cui y ha lo stesso valore che in (1) e (3), e Δy lo stesso valore che in (3). Allora tra i valori di cui la variabile dipendente è suscettibile in (2), *uno deve essere* $x+\Delta x$, i simboli avendo gli stessi valori che in (3).

Adunque $x + \Delta x = \psi(y + \Delta y)$ .... (4).

Da (1) e (3)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x} \text{ .... } (5).$$

Da (2) e (4)

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{\psi(y + \Delta y) - \psi(y)}{\Delta y} \text{ .... } (6).$$

In (5) e (6) gli stessi simboli hanno gli stessi valori, e poichè in questo caso $\frac{\Delta y}{\Delta x} \times \frac{\Delta x}{\Delta y} = 1$, abbiamo

$$\frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x} \times \frac{\psi(y + \Delta y) - \psi(y)}{\Delta y} = 1.$$

Ora si diminuiscano Δx e Δy senza limite, ed avremo

$$\varphi'(x) \times \psi'(y) = 1;$$

o, come può scriversi,

$$\frac{dy}{dx} \times \frac{dx}{dy} = 1.$$

61. La dimostrazione data nell'ultimo articolo può sembrare laboriosa. Nel rivederla, lo studente si accorgerà che ciò proviene dalla necessità di dimostrare che gli x, y, Δx, e Δy, che si trovano in (5), *hanno gli stessi valori numerici delle quantità dinotate con gli stessi simboli rispettivamente in* (6). Questo punto è sovente ammesso, e si considera sufficiente il dire « poichè $\frac{\Delta y}{\Delta x} \times \frac{\Delta x}{\Delta y} = 1$ sempre, abbiamo, passando al limite, $\frac{dy}{dx} \times \frac{dx}{dy} = 1$, » ma sembrerebbe necessario almeno d'indicare ciò che si ammette.

62. Si supponga $z = \varphi(x)$,

$$y = \psi(z),$$

sicchè y è una funzione di z, e z una funzione di x. Ne segue che se sostituiamo per z il suo valore in $\psi(z)$, si ren-

derà y una funzione esplicita di x, e per conseguenza y deve avere un coefficiente differenziale rispetto ad x. Per esempio, se $z=x^2$, ed $y=z^3$, abbiamo con la sostituzione $y=x^6$. Ora questa è una funzione di x di cui conosciamo il coefficiente differenziale, per l'Art. 44. Onde $\frac{dy}{dx}=6x^5$. Ma se $z=\cos x$ ed $y=a^z$, troviamo $y=a^{\cos x}$, una funzione di x che non abbiamo ancora veduto come differenziare. Quindi la necessità e l'uso della regola dimostrata nel prossimo articolo.

63. *Coefficiente differenziale di una funzione di funzione.*

Sia $$z=\varphi(x) \ldots\ldots (1),$$
ed $$y=\psi(z) \ldots\ldots (2),$$
sicchè y è una funzione di x; si cerca il coefficiente differenziale di y rispetto ad x.

Si muti x in $x+\Delta x$, in conseguenza di che z diviene $z+\Delta z$, e si supponga in conseguenza di questo cambiamento in z, che y divenga $y+\Delta y$; con ciò
$$z+\Delta z=\varphi(x+\Delta x) \ldots\ldots (3),$$
$$y+\Delta y=\psi(z+\Delta z) \ldots\ldots (4).$$
Supponiamo ora che ponendo per z il suo valore in (2), si ottenga
$$y=F(x) \ldots\ldots (5),$$
in cui $F(x)$ dinoti una qualche funzione di x. Dal modo nel quale l'equazione (5) è ottenuta segue che possiamo *supporre x ed y di avere rispettivamente gli stessi valori in* (5) *che in* (1) *e* (2), *ed anche che*
$$y+\Delta y=F(x+\Delta x) \ldots\ldots (6),$$
in cui Δx e Δy sono le stesse quantità che si trovano già in (3) *e* (4).

Da queste equazioni si deduce
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} \text{ da (5) e (6),}$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta z}=\frac{\psi(z+\Delta z)-\psi(z)}{\Delta z} \text{ da (2) e (4),}$$
$$\frac{\Delta z}{\Delta x}=\frac{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta x} \text{ da (1) e (3),}$$

in cui gli stessi simboli dinotano da per tutto le stesse quantità. Quindi, poichè

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta z}\times\frac{\Delta z}{\Delta x},$$

abbiamo

$$\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=\frac{\psi(z+\Delta z)-\psi(z)}{\Delta z}\times\frac{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta x}.$$

Diminuiscano ora Δx, Δz, e Δy, senza limite, ed abbiamo

$$F'(x)=\psi'(z)\,\varphi'(x);$$

o, come si può scrivere,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx}.$$

Adunque il coefficiente differenziale di y rispetto ad x è eguale al prodotto del coefficiente differenziale di y rispetto a z, e del coefficiente differenziale di z rispetto ad x.

64. Possiamo fare sulla dimostrazione in questo ultimo articolo un'osservazione simile a quella nell'Art. 61. Spesso si considera sufficiente il dire che « $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta z}\times\frac{\Delta z}{\Delta x}$ per le proprietà delle frazioni, e quindi, prendendo il limite, $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx}$. »

65. *Coefficiente differenziale di* $\operatorname{sen}^{-1}x$.

Sia $y=\operatorname{sen}^{-1}x$, onde

$$\operatorname{sen} y = x,$$

quindi $$\frac{dx}{dy}=\cos y, \text{ Art. 51},$$

quindi $$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\cos y}, \text{ Art. 60.}$$

Poichè $\operatorname{sen} y=x$, $\cos y=\pm\sqrt{(1-x^2)}$; il segno da prendere dipenderà naturalmente dal valore di y; possiamo adunque porre

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}},$$

ricordandosi di dare il segno negativo al radicale se $\cos y$ è negativo.

66. *Coefficiente differenziale di* $\cos^{-1} x$.

Sia $y = \cos^{-1} x$, onde

$$\cos y = x,$$

quindi $$\frac{dx}{dy} = -\operatorname{sen} y, \text{ Art. 52},$$

quindi $$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\operatorname{sen} y}, \text{ Art. 60},$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{(1 - x^2)}}.$$

(Si vegga l'articōlo precedente).

67. *Coefficiente differenziale di* $\tan^{-1} x$ *e* $\cot^{-1} x$.

Sia $y = \tan^{-1} x$, onde

$$x = \tan y,$$

quindi $$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\cos^2 y}, \text{ Art. 53},$$

quindi $$\frac{dy}{dx} = \cos^2 y, \text{ Art. 60}.$$

$$= \frac{1}{1 + \tan^2 y}$$

$$= \frac{1}{1 + x^2}.$$

Similmente, se $y = \cot^{-1} x$,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{1 + x^2}.$$

68. *Coefficiente differenziale di* $\sec^{-1} x$ *e* $\operatorname{cosec}^{-1} x$.

Sia $y = \sec^{-1} x$, onde

$$x = \sec y,$$

quindi $$\frac{dx}{dy} = \frac{\operatorname{sen} y}{\cos^2 y}, \text{ Art. 55},$$

quindi $$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos^2 y}{\operatorname{sen} y}, \text{ Art. 60}.$$

Ma $\sec x = y$, onde $\cos y = \frac{1}{x}$, e $\operatorname{sen} y = \frac{\sqrt{(x^2-1)}}{x}$, si vegga l'Art. 65, con ciò

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\sqrt{(x^2-1)}};$$

similmente, se $\quad y = \operatorname{cosec}^{-1} x,$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x\sqrt{(x^2-1)}}.$$

69. Nel modo esposto negli articoli precedenti i coefficienti differenziali delle funzioni trigonometriche inverse sono ordinariamente determinati. Essi però possono essere trovati senza usare l'Art. 60.

Per esempio, si supponga

$$y = \tan^{-1} x,$$

onde $\quad y + \Delta y = \tan^{-1}(x+h),$

quindi $\quad \Delta y = \tan^{-1}(x+h) - \tan^{-1} x$

$$= \tan^{-1}\frac{h}{1+x(x+h)}, \text{ per la Trigonometria},$$

quindi
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{h}\tan^{-1}\frac{h}{1+x(x+h)}$$

$$= \frac{1}{1+x^2+xh}\cdot\frac{\tan^{-1}\dfrac{h}{1+x(x+h)}}{\dfrac{h}{1+x(x+h)}}.$$

Diminuisca ora h senza limite, sarà

$$\text{limite di } \frac{\tan^{-1}\dfrac{h}{1+x(x+h)}}{\dfrac{h}{1+x(x+h)}} = 1, \text{ Art. 21},$$

onde
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}.$$

70. In secondo luogo, si supponga $y = \text{sen}^{-1} x$,

onde $y + \Delta y = \text{sen}^{-1}(x+h)$,

quindi $\Delta y = \text{sen}^{-1}(x+h) - \text{sen}^{-1} x$

$= \text{sen}^{-1}[(x+h)\sqrt{(1-x^2)} - x\sqrt{\{1-(x+h)^2\}}]$, per la Trigonometria,

quindi $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\text{sen}^{-1}[(x+h)\sqrt{(1-x^2)} - x\sqrt{\{1-(x+h)^2\}}]}{h}$;

si ponga $(x+h)\sqrt{(1-x^2)} - x\sqrt{\{1-(x+h)^2\}} = z$ per brevità,

allora $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\text{sen}^{-1} z}{h} = \dfrac{\text{sen}^{-1} z}{z} \cdot \dfrac{z}{h}$.

Ora $\dfrac{z}{h} = \dfrac{(x+h)\sqrt{(1-x^2)} - x\sqrt{\{1-(x+h)^2\}}}{h}$

$= \dfrac{(x+h)^2(1-x^2) - x^2\{1-(x+h)^2\}}{h[(x+h)\sqrt{(1-x^2)} + x\sqrt{\{1-(x+h)^2\}}]}$

$= \dfrac{2x+h}{(x+h)\sqrt{(1-x^2)} + x\sqrt{\{1-(x+h)^2\}}}$;

sicchè il limite di $\dfrac{z}{h}$, quando $h=0$, è $\dfrac{x}{x\sqrt{(1-x^2)}}$ o $\dfrac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$;

ed il limite di $\dfrac{\text{sen}^{-1} z}{z}$ è 1, Art. 21; adunque

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}.$$

71. *Coefficiente differenziale di* $\text{vers}^{-1} x$.

Sia $y = \text{vers}^{-1} x$, onde

$$\text{vers}\, y = x,$$

quindi $1 - \cos y = x$,

quindi $\dfrac{dx}{dy} = \text{sen}\, y$,

quindi $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\text{sen}\, y} = \dfrac{1}{\sqrt{(1-\cos^2 y)}} = \dfrac{1}{\sqrt{\{1-(1-x)^2\}}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{(2x-x^2)}}.$$

72. *Coefficiente differenziale di z^v.*

Sia $y=z^v$, in cui v e z sono entrambo funzioni di x.

Si prendano i logaritmi dei due membri dell'equazione, allora

$$\log_e y = v \log_e z.$$

Ora poichè queste due funzioni di x sono sempre eguali, i loro coefficienti differenziali rispetto ad x saranno ancora eguali.

E $$\frac{d \log_e y}{dx} = \frac{d \log_e y}{dy} \frac{dy}{dx}, \text{ Art. 63,}$$

$$= \frac{1}{y} \frac{dy}{dx}, \text{ Art. 50.}$$

Inoltre il coefficiente differenziale di $v \log_e z$

$$= \frac{dv}{dx} \log_e z + v \frac{d \log_e z}{dx}$$

$$= \frac{dv}{dx} \log_e z + \frac{v}{z} \frac{dz}{dx}, \text{ Art. 63;}$$

quindi $$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx} \log_e z + \frac{v}{z} \frac{dz}{dx},$$

e $$\frac{dy}{dx} = z^v \left(\frac{dv}{dx} \log_e z + \frac{v}{z} \frac{dz}{dx} \right).$$

73. Se paragoniamo gli Art. 29–31 con l'Art. 72 possiamo ricavare una regola generale per il coefficiente differenziale di una funzione composta. Si differenzii ordinatamente ciascuna funzione componente, trattando tutte le altre come se fossero costanti; indi si aggiungano i risultati così ottenuti.

Giova richiamare l'attenzione dello studente esplicitamente sopra tre casi differenti che i principianti sono atti a confondere.

(1) Se $y=z^a$ in cui z è una funzione di x ed *a è una costante*, allora per gli Art. 47 e 63

$$\frac{dy}{dx} = a z^{a-1} \frac{dz}{dx}.$$

(2) Se $y=a^z$ in cui z è una funzione di x ed *a è una costante*, allora per gli Art. 49 e 63

$$\frac{dy}{dx} = a^z \log_e a \frac{dz}{dx}.$$

(3) Se $y = z^v$ in cui z e v sono entrambe funzioni di x, allora per l'Art. 72

$$\frac{dy}{dx} = z^v \left(\frac{dv}{dx} \log_e z + \frac{v}{z}\frac{dz}{dx}\right).$$

74. *Coefficiente differenziale di x^n. Terzo metodo*, si veggano gli Art. 47 e 48.

Il coefficiente differenziale di x^n è alle volte trovato nel seguente modo:

In primo luogo si dimostri come negli Art. 44 e 45 che se n è un intero positivo, il coefficiente differenziale di x^n è nx^{n-1}.

Se poi n è frazionario e positivo, si supponga $= \frac{p}{q}$ in cui p e q sono interi positivi.

Sia $$y = x^n = x^{\frac{p}{q}},$$
onde $$y^q = x^p.$$

Quindi prendendo i coefficienti differenziali dei due lati

$$qy^{q-1}\frac{dy}{dx} = px^{p-1},$$

onde $$\frac{dy}{dx} = \frac{px^{p-1}}{qy^{q-1}} = \frac{p}{q} \cdot \frac{x^{p-1}}{x^{\frac{p}{q}(q-1)}}$$

$$= \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-1} = nx^{n-1}.$$

La regola è così stabilita finchè n è positivo. Se n è negativo si supponga $= -m$, sicchè m è positivo.

Sia $y = x^{-m}$, onde

$$\frac{1}{y} = x^m,$$

quindi $$1 = yx^m.$$

Si differenziino i due lati, e si avrà

$$0 = x^m \frac{dy}{dx} + ymx^{m-1}, \text{ Art. 29 e 33},$$

onde $$\frac{dy}{dx} = -\frac{my}{x} = -mx^{-m-1}$$
$$= nx^{n-1}.$$

Quindi la regola per differenziare x^n è stabilita in generale.

75. Daremo ora alcuni esempi delle regole precedenti per trovare coefficienti differenziali.

(1) Sia $y = \operatorname{sen} ax$.

Si ponga $ax = z$; onde $y = \operatorname{sen} z$,

e $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx}, \text{ Art. 63.}$$

Ma $$\frac{dy}{dz} = \cos z, \text{ Art. 51,}$$

e $$\frac{dz}{dx} = a, \text{ Art. 33,}$$

dunque $$\frac{dy}{dx} = a\cos z = a\cos ax.$$

(2) Sia $y = \operatorname{sen}(\log x)$.

Con $\log x$ senza specificare alcuna base, intendiamo $\log_e x$.

Si ponga $$\log x = z,$$

onde $$y = \operatorname{sen} z,$$

e $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx}, \text{ Art. 63.}$$

Ma $$\frac{dy}{dz} = \cos z, \text{ Art. 51,}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x}, \text{ Art. 50,}$$

dunque $$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos z}{x} = \frac{\cos(\log x)}{x}.$$

(3) $y = \log(\operatorname{sen} x)$.

Si ponga $$\operatorname{sen} x = z,$$

onde $$y = \log z,$$

e $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx}, \text{ Art. 63,}$$

$$= \frac{1}{z}\cos x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

$$= \cot x.$$

(4) $y = \log \dfrac{a+bx}{a-bx}$.

Si ponga $$\frac{a+bx}{a-bx} = z,$$

ondo $$\frac{dz}{dx} = \frac{b\,(a-bx) + b\,(a+bx)}{(a-bx)^2}, \text{ Art. 31},$$

$$= \frac{2ab}{(a-bx)^2},$$

quindi $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{z}\,\frac{2ab}{(a-bx)^2} = \frac{2ab}{a^2 - b^2x^2}.$$

Questo esempio può essere anche risoluto ponendo

$$y = \log(a+bx) - \log(a-bx),$$

onde $$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a+bx} + \frac{b}{a-bx} = \frac{2ab}{a^2-b^2x^2}.$$ ✗

(5) $y = \cos^{-1} \dfrac{4-3x^2}{x^3}$.

Si ponga $$\frac{4-3x^2}{x^3} = z,$$

onde $$y = \cos^{-1} z,$$

e $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\,\frac{dz}{dx}.$$

Ora $$\frac{dy}{dz} = -\frac{1}{\sqrt{(1-z^2)}}, \text{ Art. 66},$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{\left\{1 - \left(\frac{4-3x^2}{x^3}\right)^2\right\}}} = \frac{-x^3}{\sqrt{(x^6 - 9x^4 + 24x^2 - 16)}};$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{-6x^4 - 3x^2(4-3x^2)}{x^6}, \text{ Art. 31},$$

$$= \frac{3(x^2-4)}{x^4};$$

quindi $\frac{dy}{dx} = -\frac{x^3}{\sqrt{(x^6-9x^4+24x^2-16)}} \cdot \frac{3(x^2-4)}{x^4}$

$$= \frac{-3(x^2-4)}{x\sqrt{\{(x^2-1)(x^2-4)^2\}}} = -\frac{3}{x\sqrt{(x^2-1)}}.$$

Nel differenziare $\frac{4-3x^2}{x^3}$ facciamo uso della regola per trovare il coefficiente differenziale di una frazione. Ponendo l'espressione sotto la forma

$$\frac{4}{x^3} - \frac{3}{x},$$

o sia, $$4x^{-3} - 3x^{-1},$$

abbiamo per il coefficiente differenziale

$$-12x^{-4} + 3x^{-2}, \text{ Art. } 47,$$

o $$\frac{3(x^2-4)}{x^4}, \text{ come sopra.}$$

Si può osservare che frequentemente si presentano casi di tal fatta nei quali possiamo adottare più di un metodo. Lo studente troverà molto utile nel rendersi familiare con le regole, di ottenere i suoi risultati, se è possibile, con diversi metodi.

(6) $y = \frac{\sqrt{\{ax(x-3a)\}}}{\sqrt{(x-4a)}}$.

È spesso conveniente di prendere i logaritmi dei due membri di un'equazione prima di differenziare. Così, dall'equazione precedente, abbiamo

$$\log y = \tfrac{1}{2}\{\log a + \log x + \log(x-3a) - \log(x-4a)\}.$$

Si prenda il coefficiente differenziale di ciascun membro dell'equazione, e verrà

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{x} + \frac{1}{x-3a} - \frac{1}{x-4a}\right\}$$

$$= \frac{x^2 - 8ax + 12a^2}{2x(x-3a)(x-4a)},$$

onde $$\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{a}\cdot(x^2-8ax+12a^2)}{2\{x(x-3a)\}^{\frac{1}{2}}(x-4a)^{\frac{3}{2}}}.$$

(7) $y=\tan^{-1}\dfrac{x}{a}$.

Si ponga $\dfrac{x}{a}=z$, onde $y=\tan^{-1}z$,

quindi $$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{1+z^2}\frac{dz}{dx}$$
$$=\frac{1}{1+\dfrac{x^2}{a^2}}\frac{1}{a}=\frac{a}{a^2+x^2}.$$

(8) Sia $y=\tan^{-1}\dfrac{3a^2x-x^3}{a(a^2-3x^2)}$.

Si ponga $\dfrac{3xa^2-x^3}{a(a^2-3x^2)}=z$; onde $y=\tan^{-1}z$,

e $$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx}=\frac{1}{1+z^2}\frac{dz}{dx}.$$

Ora $$\frac{dz}{dx}=\frac{3(a^2-x^2)(a^2-3x^2)+6x(3xa^2-x^3)}{a(a^2-3x^2)^2},\text{ Art. 31,}$$
$$=\frac{3(a^4+2a^2x^2+x^4)}{a(a^2-3x^2)^2}.$$

E riducendo troviamo che
$$\frac{1}{1+z^2}=\frac{a^2(a^2-3x^2)^2}{(a^2+x^2)^3}.$$

Onde $$\frac{dy}{dx}=\frac{3a}{a^2+x^2}.$$

Infatti abbiamo dalla Trigonometria
$$\tan^{-1}\frac{3a^2x-x^3}{a(a^2-x^2)}=3\tan^{-1}\frac{x}{a},$$
e quindi il valore di $\dfrac{dy}{dx}$ deve essere $\dfrac{3a}{a^2+x^2}$.

È chiaro che altri esempi capaci di verificarsi possono essere formati a norma di questo esempio.

(9) $y = \tan^{-1}\left(\frac{e^x \cos x}{1 + e^x \operatorname{sen} x}\right).$

Si ponga $\frac{e^x \cos x}{1 + e^x \operatorname{sen} x} = z,$

onde $y = \tan^{-1} z,$

quindi $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+z^2}\frac{dz}{dx}.$

Ora $\frac{dz}{dx} = \frac{(e^x \cos x - e^x \operatorname{sen} x)(1 + e^x \operatorname{sen} x) - e^x \cos x (e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x)}{(1 + e^x \operatorname{sen} x)^2}$

$= \frac{e^x(\cos x - \operatorname{sen} x - e^x)}{(1 + e^x \operatorname{sen} x)^2};$

ed $\frac{1}{1+z^2} = \frac{(1 + e^x \operatorname{sen} x)^2}{1 + 2e^x \operatorname{sen} x + e^{2x}};$

quindi $\frac{dy}{dx} = \frac{e^x(\cos x - \operatorname{sen} x - e^x)}{1 + 2e^x \operatorname{sen} x + e^{2x}}.$

(10) $y = \operatorname{sen} x \tan^{-1} x\, a^x \log x.$

$\frac{dy}{dx} = \cos x \tan^{-1} x\, a^x \log x + \frac{\operatorname{sen} x\, a^x \log x}{1+x^2}$

$+ \operatorname{sen} x \tan^{-1} x\, a^x \log a \log x + \frac{\operatorname{sen} x \tan^{-1} x\, a^x}{x}.$ Art. 30.

76. I coefficienti differenziali delle funzioni semplici sono quì riuniti ad oggetto di richiamo.

$y = x^n.$ $\qquad \frac{dy}{dx} = nx^{n-1}.$

$y = \log_a x.$ $\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \log_e a}.$

$y = a^x.$ $\qquad \frac{dy}{dx} = a^x \log_e a.$

$$y = \text{sen}\,\frac{x}{a}. \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{a}\cos\frac{x}{a}.$$

$$y = \cos\frac{x}{a}. \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{a}\,\text{sen}\,\frac{x}{a}.$$

$$y = \tan\frac{x}{a}. \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{a}\sec^2\frac{x}{a}.$$

$$y = \cot\frac{x}{a}. \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{a}\,\text{cosec}^2\frac{x}{a}.$$

$$y = \sec\frac{x}{a}. \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{a}\,\frac{\text{sen}\,\frac{x}{a}}{\cos^2\frac{x}{a}}.$$

$$y = \text{cosec}\,\frac{x}{a}. \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{a}\,\frac{\cos\frac{x}{a}}{\text{sen}^2\frac{x}{a}}.$$

$$y = \text{sen}^{-1}\frac{x}{a}. \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{(a^2-x^2)}}.$$

$$y = \cos^{-1}\frac{x}{a}. \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{(a^2-x^2)}}.$$

$$y = \tan^{-1}\frac{x}{a}. \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{a}{a^2+x^2}.$$

$$y = \cot^{-1}\frac{x}{a}. \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{a}{a^2+x^2}.$$

$$y = \sec^{-1}\frac{x}{a}. \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{a}{x\sqrt{(x^2-a^2)}}.$$

$$y = \text{cosec}^{-1}\frac{x}{a}. \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{a}{x\sqrt{(x^2-a^2)}}.$$

$$y = \text{vers}^{-1}\frac{x}{a}. \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{(2ax-x^2)}}.$$

ESEMPII.

1. $y = c\sqrt{x}$. $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{c}{2\sqrt{x}}$.

2. $y = \dfrac{a-x}{x}$. $\qquad \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{a}{x^2}$.

3. $y = \dfrac{1+x}{1+x^2}$. $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1-2x-x^2}{(1+x^2)^2}$.

4. $y = x\log x$. $\qquad \dfrac{dy}{dx} = 1 + \log x$.

5. $y = \log \operatorname{cotan} x$. $\qquad \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2}{\operatorname{sen} 2x}$.

6. $y = \dfrac{x}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$. $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{a^2}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

7. $y = \dfrac{x^3}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$. $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x^2}{(a^2-x^2)^{\frac{5}{2}}}$.

8. $y = e^x(1-x^3)$. $\qquad \dfrac{dy}{dx} = e^x(1-3x^2-x^3)$.

9. $y = (x-3)e^{2x} + 4xe^x + x + 3$.

$$\frac{dy}{dx} = (2x-5)e^{2x} + 4(x+1)e^x + 1.$$

10. $y = (2x-5)e^{2x} + 4(x+1)e^x + 1$.

$$\frac{dy}{dx} = 4e^x\{(x-2)e^x + x + 2\}.$$

11. $y = \left(\dfrac{x}{n}\right)^{nx}$. $\qquad \dfrac{dy}{dx} = n\left(\dfrac{x}{n}\right)^{nx}\left\{1 + \log\dfrac{x}{n}\right\}$.

12. $y = \dfrac{x^n}{(1+x)^n}$. $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{nx^{n-1}}{(1+x)^{n+1}}$.

13. $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$. $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4}{(e^x + e^{-x})^2}$.

14. $y = \log(e^x + e^{-x})$ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

15. $y = x^2 (a + x)^3 (b - x)^4$.

$$\frac{dy}{dx} = \{2ab - (6a - 5b)x - 9x^2\} x (a + x)^2 (b - x)^3.$$

16. $y = (a + x)^m (b + x)^n$.

$$\frac{dy}{dx} = (a + x)^{m-1} (b + x)^{n-1} \{m(b + x) + n(a + x)\}.$$

17. $y = \dfrac{1}{(a+x)^m} \dfrac{1}{(b+x)^n}$. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{m(b+x) + n(a+x)}{(a+x)^{m+1}(b+x)^{n+1}}$.

18. $y = \dfrac{\tan^3 x}{3} - \tan x + x$. $\dfrac{dy}{dx} = \tan^4 x$.

19. $y = \dfrac{1}{x + \sqrt{(1-x^2)}}$. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x - \sqrt{(1-x^2)}}{\sqrt{(1-x^2)}\{1 + 2x\sqrt{(1-x^2)}\}}$.

20. $y = (a^2 + x^2) \tan^{-1}\dfrac{x}{a}$. $\dfrac{dy}{dx} = 2x \tan^{-1}\dfrac{x}{a} + a$.

21. $y = \sqrt{\left(a + \dfrac{b}{x} + \dfrac{c}{x^2}\right)}$. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{2x^2} \dfrac{bx + 2c}{\sqrt{(ax^2 + bx + c)}}$.

22. $y = \log\{\log(a + bx^n)\}$. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{nbx^{n-1}}{(a + bx^n)\log(a + bx^n)}$.

23. $y = \log\tan\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{x}{2}\right)$. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\cos x}$.

24. $y = e^{(a+x)^2} \operatorname{sen} x$. $\dfrac{dy}{dx} = e^{(a+x)^2} \{2(a+x)\operatorname{sen} x + \cos x\}$.

25. $y = \dfrac{\sqrt{(a+x)}}{\sqrt{a} + \sqrt{x}}$. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sqrt{a}(\sqrt{x} - \sqrt{a})}{2\sqrt{x}\sqrt{(a+x)}(\sqrt{a} + \sqrt{x})^2}$.

26. $y = \sqrt{\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)}$. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{(1-x^2)}(1-x)}$.

27. $y = \sqrt{\left\{\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^3}\right\}}$. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-2x(2-x^2)}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}(1+x^2)^{\frac{5}{2}}}$.

28. $y=\frac{x}{e^x-1}$. $\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{e^x(1-x)-1}{(e^x-1)^2}$.

29. $y=e^x\,\frac{(x-2)e^x+x+2}{(e^x-1)^3}$.

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{e^x}{(e^x-1)^4}\{(x-3)e^{2x}+4xe^x+x+3\}.$$

30. $y=\log\frac{\sqrt{(1+x)}+\sqrt{(1-x)}}{\sqrt{(1+x)}-\sqrt{(1-x)}}$. $\qquad \frac{dy}{dx}=-\frac{1}{x\sqrt{(1-x^2)}}$.

31. $y=\{x+\sqrt{(1-x^2)}\}^n$. $\frac{dy}{dx}=n\{x+\sqrt{(1-x^2)}\}^{n-1}\frac{\sqrt{(1-x^2)}-x}{\sqrt{(1-x^2)}}$.

32. $y=\left\{\frac{x}{1+\sqrt{(1-x^2)}}\right\}^n$. $\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{ny}{x\sqrt{(1-x^2)}}$.

33. $y=\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)}}\left\{\frac{x}{1+\sqrt{(1-x^2)}}\right\}^n$.

$$\frac{dy}{dx}=\left\{\frac{x}{1+\sqrt{(1-x^2)}}\right\}^n\frac{1+n\sqrt{(1-x^2)}}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

34. $y=a^{\frac{1}{\sqrt{(a^2-x^2)}}}$. $\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{xy}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}\log_e a$.

35. $y=\tan a^{\frac{1}{x}}$. $\qquad \frac{dy}{dx}=-\frac{\sec^2 a^{\frac{1}{x}}}{x^2}\log_e a.a^{\frac{1}{x}}$.

36. $y=\log\{\sqrt{(1+x^2)}+\sqrt{(1-x^2)}\}$. $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}\left\{1-\frac{1}{\sqrt{(1-x^4)}}\right\}$.

37. $y=(2a^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}})\sqrt{(a^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}})}$. $\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{4a^{\frac{1}{2}}+3x^{\frac{1}{2}}}{4\sqrt{x}\sqrt{(a^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}})}}$.

38. $y=x+\log\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$. $\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{2}{1+\tan x}$.

39. $y=\frac{\sqrt{(1+x^2)}+\sqrt{(1-x^2)}}{\sqrt{(1+x^2)}-\sqrt{(1-x^2)}}$. $\qquad \frac{dy}{dx}=-\frac{2}{x^3}\left\{1+\frac{1}{\sqrt{(1-x^4)}}\right\}$.

40. $y = x \operatorname{sen}^{-1} x.$ $\qquad \frac{dy}{dx} = \operatorname{sen}^{-1} x + \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)}}.$

41. $y = \tan x \tan^{-1} x.$ $\qquad \frac{dy}{dx} = \sec^2 x \tan^{-1} x + \frac{\tan x}{1+x^2}.$

42. $y = \operatorname{sen} nx (\operatorname{sen} x)^n.$ $\qquad \frac{dy}{dx} = n (\operatorname{sen} x)^{n-1} \operatorname{sen} (n+1) x.$

43. $y = \frac{(\operatorname{sen} nx)^m}{(\cos mx)^n}.$ $\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{mn (\operatorname{sen} nx)^{m-1} \cos (mx - nx)}{(\cos mx)^{n+1}}.$

44. $y = e^{-a^2 x^2} \cos rx.$ $\qquad \frac{dy}{dx} = - e^{-a^2 x^2} (2a^2 x \cos rx + r \operatorname{sen} rx).$

45. $y = \frac{x - \operatorname{sen}^{-1} x}{(\operatorname{sen} x)^3}.$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\operatorname{sen} x \left\{ 1 - \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}} \right\} - 3 (x - \operatorname{sen}^{-1} x) \cos x}{(\operatorname{sen} x)^4}.$$

46. $y = \log \left\{ \frac{a + b \tan \frac{x}{2}}{a - b \tan \frac{x}{2}} \right\}.$ $\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{ab}{a^2 \cos^2 \frac{x}{2} - b^2 \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}}.$

47. $y = x^x.$ $\qquad \frac{dy}{dx} = x^x (1 + \log x).$

48. $y = x^{\frac{1}{x}}.$ $\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{x^{\frac{1}{x}} (1 - \log x)}{x^2}.$

49. $y = x^{\operatorname{sen}^{-1} x}.$ $\qquad \frac{dy}{dx} = x^{\operatorname{sen}^{-1} x} \left\{ \frac{\operatorname{sen}^{-1} x}{x} + \frac{\log x}{\sqrt{(1-x^2)}} \right\}.$

50. $y = e^{e^x}.$ $\qquad \frac{dy}{dx} = e^{e^x} e^x.$

51. $y = e^{x^x}.$ $\qquad \frac{dy}{dx} = e^{x^x} x^x (1 + \log x).$

52. $y = x^{x^x}.$ $\qquad \frac{dy}{dx} = y x^x \left\{ \frac{1}{x} + \log x + (\log x)^2 \right\}.$

53. $y = x^{e^x}$. $\qquad \dfrac{dy}{dx} = x^{e^x} e^x \dfrac{1 + x \log x}{x}$.

54. $y = \tan^{-1} \dfrac{2x}{1+x^2}$. $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2(1-x^2)}{1+6x^2+x^4}$.

55. $y = \text{sen}^{-1} \dfrac{x+1}{\sqrt{2}}$. $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{(1-2x-x^2)}}$.

56. $y = \tan \sqrt{(1-x)}$. $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-\{\sec \sqrt{(1-x)}\}^2}{2\sqrt{(1-x)}}$.

57. $y = \tan^{-1} \dfrac{x}{\sqrt{(1-x^2)}}$. $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$.

58. $y = \tan^{-1} (n \tan x)$. $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{n}{\cos^2 x + n^2 \text{sen}^2 x}$.

59. $y = \sec^{-1} \dfrac{a}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$. $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$.

60. $y = (x+a) \tan^{-1} \sqrt{\dfrac{x}{a}} - \sqrt{(ax)}$. $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \tan^{-1} \sqrt{\dfrac{x}{a}}$.

61. $y = \tan^{-1} \dfrac{x}{a} + \log \left(\dfrac{x-a}{x+a}\right)^{\frac{1}{2}}$. $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2ax^2}{x^4-a^4}$.

62. $y = \text{sen}^{-1} \sqrt{(\text{sen}\, x)}$. $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \sqrt{(1 + \text{cosec}\, x)}$.

63. $y = \tan^{-1} \dfrac{2x}{1-x^2}$. $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2}{1+x^2}$.

64. $y = \text{sen}^{-1} \dfrac{ax}{b+cx^2}$. $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{a(b-cx^2)}{\sqrt{\{b^2+(2bc-a^2)x^2+c^2x^4\}}} \cdot \dfrac{1}{b+cx^2}$.

65. $y = \sqrt{(1-x^2)}\, \text{sen}^{-1} x - x$. $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x\, \text{sen}^{-1} x}{\sqrt{(1-x^2)}}$.

66. $y = \dfrac{x\, \text{sen}^{-1} x}{\sqrt{(1-x^2)}} + \log \sqrt{(1-x^2)}$. $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\text{sen}^{-1} x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

67. $y = \tan^{-1} \{x + \sqrt{(1-x^2)}\}$. $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sqrt{(1-x^2)} - x}{2\sqrt{(1-x^2)}\{1+x\sqrt{(1-x^2)}\}}$.

68. $y = \operatorname{sen}^{-1} \frac{x \tan \alpha}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$. $\frac{dy}{dx} = \frac{a^2 \tan \alpha}{a^2 - x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{(a^2 - x^2 \sec^2 \alpha)}}$.

69. $y = \operatorname{sen}^{-1} \sqrt{\left(\frac{a^2 - x^2}{b^2 - x^2}\right)}$. $\frac{dy}{dx} = - \frac{x \sqrt{(b^2 - a^2)}}{(b^2 - x^2) \sqrt{(a^2 - x^2)}}$.

70. $y = \tan^{-1} \sqrt{\left(\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}\right)}$. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}$.

71. $y = \operatorname{sen}^{-1} \frac{b + a \cos x}{a + b \cos x}$. $\frac{dy}{dx} = \frac{-\sqrt{(a^2 - b^2)}}{a + b \cos x}$.

72. $y = \tan^{-1} \left\{ \frac{\sqrt{(a^2 - b^2)} \operatorname{sen} x}{b + a \cos x} \right\}$. $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{(a^2 - b^2)}}{a + b \cos x}$.

73. $y = \cos^{-1} \frac{x^{2n} - 1}{x^{2n} + 1}$. $\frac{dy}{dx} = - \frac{2n x^{n-1}}{x^{2n} + 1}$.

74. $y = \sec^{-1} \frac{1}{2x^2 - 1}$. $\frac{dy}{dx} = - \frac{2}{\sqrt{(1 - x^2)}}$.

75. $y = \tan^{-1} \frac{\sqrt{(1 + x^2)} - 1}{x}$. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2(1 + x^2)}$.

76. $y = \log \frac{1 + x\sqrt{2} + x^2}{1 - x\sqrt{2} + x^2} + 2 \tan^{-1} \frac{x\sqrt{2}}{1 - x^2}$. $\frac{dy}{dx} = \frac{4\sqrt{2}}{1 + x^4}$.

77. Se $u = \frac{1}{6} \log \frac{(y+1)^2}{y^2 - y + 1} - \frac{1}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \frac{2y - 1}{\sqrt{3}}$,

in cui $y = \frac{\sqrt[3]{(1 + 3x + 3x^2)}}{x}$,

mostrare che $\frac{du}{dx} = \frac{1}{xy(1 + x)}$.

78. Essendo $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x + \ldots + \operatorname{sen} nx = \frac{\operatorname{sen} \frac{n+1}{2} x \operatorname{sen} \frac{nx}{2}}{\operatorname{sen} \frac{x}{2}}$,

dedurre, prendendo i coefficienti differenziali dei due lati, la somma di

$$\cos x + 2\cos 2x + \ldots + n\cos nx.$$

Ris. $$\frac{\frac{n+1}{2}\operatorname{sen}\frac{x}{2}\operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}x - \frac{1}{2}\left(\operatorname{sen}\frac{n+1}{2}x\right)^2}{\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}.$$

79. Essendo, per la Trigonometria,

$$\operatorname{sen} x \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{m}+x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{m}+x\right)\ldots\operatorname{sen}\left(\frac{m-1}{m}\pi+x\right)=\frac{\operatorname{sen} mx}{2^{m-1}},$$

in cui m è un intero positivo, dimostrare che

$$\cot x + \cot\left(\frac{\pi}{m}+x\right)+\ldots+\cot\left(\frac{m-1}{m}\pi+x\right)=m\cot mx.$$

80. Dal risultato precedente dedurre che

$$\operatorname{cosec}^2 x + \operatorname{cosec}^2\left(\frac{\pi}{m}+x\right)+\ldots+\operatorname{cosec}^2\left(\frac{m-1}{m}\pi+x\right)$$
$$= m^2\operatorname{cosec}^2 mx.$$

CAPITOLO V.

DIFFERENZIAZIONE SUCCESSIVA.

77. Nei capitoli precedenti abbiamo mostrato come da una data funzione di una variabile si può dedurre un'altra funzione, chiamata il coefficiente differenziale della prima. Questa seconda funzione, con le stesse regole, ha *il suo* coefficiente differenziale, il quale si dice il *secondo coefficiente differenziale* della funzione primitiva.

Così, se $y = x^n$, abbiamo $\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$. Il coefficiente differenzialo di nx^{n-1} è $n(n-1)x^{n-2}$, il quale è perciò il *secondo* coefficiente differenziale di y o x^n. Il secondo coefficiente di y è dinotato da

$$\frac{d^2y}{dx^2},$$

il quale deve essere considerato come un'abbreviazione di

$$\frac{d\frac{dy}{dx}}{dx}.$$

Ciò che si disse di $\frac{dy}{dx}$ nell'Art. 26, diciamo ora di $\frac{d^2y}{dx^2}$, il quale deve essere riguardato come un *simbolo intero, non suscettibile di decomposizione in un numeratore d^2y ed un denominatore dx^2.*

Siccome $\frac{d^2y}{dx^2}$ sarà generalmente una funzione di x avrà il *suo* coefficiente differenziale. Questo si dice il terzo coefficiente differenziale di y, ed è dinotato da

$$\frac{d^3y}{dx^3},$$

quale abbreviazione di

$$\frac{d\,\frac{d^2y}{dx^2}}{dx}.$$

Questo processo e questa notazione possono estendersi indefinitamente.

I coefficienti differenziali successivi di una funzione sono spesso indicati convenientemente con accenti sulla funzione. Così, se $\varphi(x)$ è una funzione qualunque di x, allora $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$, $\varphi'''(x)$, $\varphi^{\text{IV}}(x)$, etc. dinoteranno il primo, secondo, terzo, quarto, etc. coefficiente differenziale di $\varphi(x)$ rispetto ad x.

78. In alcuni casi l'n^{mo} coefficiente differenziale di una funzione ammette un'espressione algebrica semplice. Per esempio, si supponga

$$y = \operatorname{sen} x;$$

quindi
$$\frac{dy}{dx} = \cos x = \operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d \operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{dx} = \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \operatorname{sen}\left(x+\frac{2\pi}{2}\right),$$

del pari
$$\frac{d^3y}{dx^3} = \operatorname{sen}\left(x+\frac{3\pi}{2}\right),$$

e generalmente
$$\frac{d^ny}{dx^n} = \operatorname{sen}\left(x+\frac{n\pi}{2}\right).$$

Similmente, se $y = \operatorname{sen} ax$,

$$\frac{d^ny}{dx^n} = a^n \operatorname{sen}\left(ax + \frac{n\pi}{2}\right).$$

In modo analogo, se

$$y = \cos x,$$

$$\frac{d^ny}{dx^n} = \cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right);$$

e se $y = \cos ax, \ \frac{d^n y}{dx^n} = a^n \cos\left(ax + \frac{n\pi}{2}\right).$

79. Si supponga $y = a^x;$

quindi $\frac{dy}{dx} = a^x \log a,$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = a^x (\log a)^2,$$

e $\frac{d^n y}{dx^n} = a^x (\log a)^n.$

Similmente, se $y = e^{ax}$, $\frac{d^n y}{dx^n} = a^n e^{ax}.$

Se $y = \log x,$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} = x^{-1},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -x^{-2},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 2x^{-3},$$

e $\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{\underline{|n-1}\,(-1)^{n-1}}{x^n},$

in cui $\underline{|n-1}$ dinota $1.2.3....(n-1)$.

80. *Coefficiente differenziale del prodotto di due funzioni.*

Si supponga $u = yz,$

in cui y e z sono funzioni di x; abbiamo

$$\frac{du}{dx} = y\frac{dz}{dx} + \frac{dy}{dx}z.$$

Differenziando ambo i lati dell'equazione rispetto ad x, avremo

$$\frac{d^2u}{dx^2} = y\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{dy}{dx}\frac{dz}{dx} + \frac{dy}{dx}\frac{dz}{dx} + \frac{d^2y}{dx^2}z$$

$$= y\frac{d^2z}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx}\frac{dz}{dx} + \frac{d^2y}{dx^2}z.$$

Similmente

$$\frac{d^3u}{dx^3} = y\frac{d^3z}{dx^3} + \frac{dy}{dx}\frac{d^2z}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx}\frac{d^2z}{dx^2} + 2\frac{d^2y}{dx^2}\frac{dz}{dx} + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{dz}{dx} + \frac{d^3y}{dx^3}z$$

$$= y\frac{d^3z}{dx^3} + 3\frac{dy}{dx}\frac{d^2z}{dx^2} + 3\frac{d^2y}{dx^2}\frac{dz}{dx} + \frac{d^3y}{dx^3}z.$$

Nelle formole ottenute i coefficienti numerici seguono la stessa legge di quelli del teorema sul Binomio. Possiamo dimostrare col metodo d'induzione che avverrà lo stesso in generale. Infatti ammettiamo

$$\frac{d^nu}{dx^n} = y\frac{d^nz}{dx^n} + n\frac{dy}{dx}\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}} + \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{d^2y}{dx^2}\frac{d^{n-2}z}{dx^{n-2}} + \dots$$

$$+ \frac{n(n-1)\dots(n-r+1)}{\underline{|r}}\frac{d^ry}{dx^r}\frac{d^{n-r}z}{dx^{n-r}}$$

$$+ \frac{n(n-1)\dots(n-r)}{\underline{|r+1}}\frac{d^{r+1}y}{dx^{r+1}}\frac{d^{n-r-1}z}{dx^{n-r-1}} + \dots + \frac{d^ny}{dx^n}z \; \dots\dots (1).$$

Si differenziino i due lati rispetto ad x: allora

$$\frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}} = y\frac{d^{n+1}z}{dx^{n+1}} + \frac{dy}{dx}\frac{d^nz}{dx^n} + n\frac{dy}{dx}\frac{d^nz}{dx^n} + n\frac{d^2y}{dx^2}\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}} + \dots$$

$$+ \frac{n(n-1)\dots(n-r+1)}{\underline{|r}}\left\{\frac{d^ry}{dx^r}\frac{d^{n-r+1}z}{dx^{n-r+1}} + \frac{d^{r+1}y}{dx^{r+1}}\frac{d^{n-r}z}{dx^{n-r}}\right\}$$

$$+ \frac{n(n-1)\dots(n-r)}{\underline{|r+1}}\left\{\frac{d^{r+1}y}{dx^{r+1}}\frac{d^{n-r}z}{dx^{n-r}} + \frac{d^{r+2}y}{dx^{r+2}}\frac{d^{n-r-1}z}{dx^{n-r-1}}\right\} +$$

$$\dots\dots + \frac{d^ny}{dx^n}\frac{dz}{dx} + \frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}z \; \dots\dots\dots (2).$$

Riducendo i termini, abbiamo

$$\frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}} = y\frac{d^{n+1}z}{dx^{n+1}} + (n+1)\frac{dy}{dx}\frac{d^nz}{dx^n} + \dots$$

$$+ \frac{(n+1)n\dots(n+1-r)}{\underline{|r+1}}\frac{d^{r+1}y}{dx^{r+1}}\frac{d^{n-r}z}{dx^{n-r}} +$$

$$\dots\dots + \frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}z \; \dots\dots\dots (3).$$

Ora la serie (3) segue la stessa legge di (1). Quindi se la formola (1) è vera per un valore di n, essa è anche vera per il valore di n prossimamente maggiore. Ma abbiamo dimostrato che essa vale per $n=3$; quindi essa vale per $n=4$, quindi per $n=5$, etc.; cioè a dire essa è vera in generale.

Questo teorema prende il nome del suo scopritore, Leibnitz.

81. Se $u=e^{ax}\cos bx$; abbiamo per gli Art. 78 ed 80,

$$\frac{d^n u}{dx^n}=e^{ax}\left\{a^n\cos bx+nba^{n-1}\cos\left(bx+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}b^2\cos\left(bx+\frac{2\pi}{2}\right)\right.$$
$$\left.+\ldots\ldots+b^n\cos\left(bx+\frac{n\pi}{2}\right)\right\}.$$

Possiamo trovare un' altra forma per questo coefficiente differenziale n^{mo} nel seguente modo:

$$\frac{du}{dx}=e^{ax}(a\cos bx-b\,\mathrm{sen}\,bx);$$

si ponga $a=r\cos\varphi$,

$b=r\,\mathrm{sen}\,\varphi$,

sicchè $r=(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}$;

con ciò $\dfrac{du}{dx}=re^{ax}\cos(bx+\varphi)$,

in cui r e φ sono quantità costanti.

Similmente $\dfrac{d^2u}{dx^2}=re^{ax}\{a\cos(bx+\varphi)-b\,\mathrm{sen}\,(bx+\varphi)\}$

$$=r^2e^{ax}\cos(bx+2\varphi),$$

e generalmente

$$\frac{d^n e^{ax}\cos bx}{dx^n}=r^n e^{ax}\cos(bx+n\varphi).$$

82. Il seguente è un esempio importante dell'Art. 80.

Sia $u=e^{ax}y$;

allora, rammentandosi che $\dfrac{d^n e^{ax}}{dx^n}=a^n e^{ax}$, abbiamo

$$\frac{d^n u}{dx^n}=e^{ax}\left\{a^n y+na^{n-1}\frac{dy}{dx}+\frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}\frac{d^2y}{dx^2}+\ldots+\frac{d^n y}{dx^n}\right\}\ldots(1).$$

Se ora l'espressione

$$\left(a + \frac{d}{dx}\right)^n y,$$

si sviluppi col teorema del Binomio, ed i simboli

$$\left(\frac{d}{dx}\right) y, \left(\frac{d}{dx}\right)^2 y, \left(\frac{d}{dx}\right)^3 y, \text{ etc.}$$

si rimpiazzino con

$$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \text{ etc. rispettivamente,}$$

il risultato sarà lo stesso della serie in parentesi in (1). *Quindi, possiamo scrivere*

$$\frac{d^n(e^{ax}y)}{dx^n} = e^{ax}\left(a+\frac{d}{dx}\right)^n y \dots\dots\dots\dots\dots (2),$$

come un conveniente metodo abbreviato di esprimere l'equazione (1).

83. Il teorema seguente è alle volte usato nei rami superiori delle matematiche.

Se n è un intero positivo qualunque

$$v\frac{d^n u}{dx^n} = \frac{d^n uv}{dx^n} - n\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(u\frac{dv}{dx}\right) + \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}\left(u\frac{d^2v}{dx^2}\right)$$

$$- \dots\dots\dots + (-1)^n u\frac{d^n v}{dx^n} \dots\dots\dots (1).$$

Questo teorema può essere stabilito subito con l'Induzione. Infatti esso è evidentemente vero per $n=1$, e se ammettiamo che sia vero per un certo valore di n possiamo mostrare che sia ancor vero quando n si cambia in $n+1$. Si ammetti vera l'equazione (1), e si differenziino i due lati; verrà

$$v\frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}} + \frac{dv}{dx}\frac{d^n u}{dx^n} = \frac{d^{n+1}uv}{dx^{n+1}} - n\frac{d^n}{dx^n}\left(u\frac{dv}{dx}\right) + \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(u\frac{d^2v}{dx^2}\right)$$

$$- \dots\dots\dots + (-1)^n\frac{d}{dx}\left(u\frac{d^n v}{dx^n}\right) \dots\dots\dots (2).$$

Inoltre poichè il teorema è supposto vero pel valore n abbiamo da (1) cambiando v in $\frac{dv}{dx}$,

$$\frac{dv}{dx}\frac{d^n u}{dx^n}=\frac{d^n}{dx^n}\left(u\frac{dv}{dx}\right)-n\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(u\frac{d^2v}{dx^2}\right)+\frac{n(n-1)}{1.2}\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}\left(u\frac{d^3v}{dx^3}\right)-\ldots\ldots\ldots+(-1)^n u\frac{d^{n+1}v}{dx^{n+1}}\ldots\ldots\ldots(3).$$

Si suppongano ora scritti i secondi membri di (2) e (3) in modo che il primo termine di (3) sia immediatamente sotto il secondo termine di (2), il secondo termine di (3) sotto il terzo termine di (2), e così di seguito. Allora sottraendo abbiamo

$$v\frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}}=\frac{d^{n+1}uv}{dx^{n+1}}-(n+1)\frac{d^n}{dx^n}\left(u\frac{dv}{dx}\right)+\frac{(n+1)n}{1.2}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(u\frac{d^2v}{dx^2}\right)-\ldots\ldots\ldots+(-1)^{n+1}u\frac{d^{n+1}v}{dx^{n+1}}.$$

Ciò mostra che se il teorema è vero per un certo valore di n sarà vero ancora quando n si cambia in $n+1$. Quindi poichè esso è vero per $n=1$ sarà vero in generale.

ESEMPII.

1. Se $y=\tan x+\sec x$, $\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\cos x}{(1-\operatorname{sen} x)^2}$.

2. Sia $y=\operatorname{sen}^3 x=\frac{3\operatorname{sen} x-\operatorname{sen} 3x}{4}$,

allora $\frac{d^n y}{dx^n}=\frac{3}{4}\operatorname{sen}\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)-\frac{3^n}{4}\operatorname{sen}\left(3x+\frac{n\pi}{2}\right)$.

3. Se $y=x^2\log x$, $\quad \frac{d^3y}{dx^3}=\frac{\lfloor 2}{x}$.

4. Se $y=x^3\log x$, $\quad \frac{d^4y}{dx^4}=\frac{\lfloor 3}{x}$.

5. Se $y=(x^2+a^2)\tan^{-1}\frac{x}{a}$, $\quad \frac{d^3y}{dx^3}=\frac{4a^3}{(a^2+x^2)^2}$.

6. Se $y = e^{-x}\cos x$, $\qquad \dfrac{d^4y}{dx^4} + 4y = 0.$

7. Se $y = \sqrt{\left(\dfrac{x^3}{x-a}\right)}$, $\qquad \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{3a^2}{4\sqrt{x}\,(x-a)^{\frac{5}{2}}}.$

8. Se $y = \{x + \sqrt{(x^2-1)}\}^n$, $\qquad (x^2-1)\dfrac{d^2y}{dx^2} + x\dfrac{dy}{dx} - n^2y = 0.$

9. Se $y = x^{n-1}\log x$, $\qquad \dfrac{d^ny}{dx^n} = \dfrac{\underline{|n-1}}{x}.$

10. Se $y = \dfrac{1-x}{1+x}$, $\qquad \dfrac{d^ny}{dx^n} = \dfrac{2(-1)^n\underline{|n}}{(1+x)^{n+1}}.$

11. Se $u_n = (e^x + e^{-x})^n$, $\qquad \dfrac{d^2u_n}{dx^2} = n^2u_n - 4n(n-1)u_{n-2}.$

12. Se $y = e^{2\sqrt{x}}$, $\qquad \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{2\sqrt{x}-1}{2x\sqrt{x}}e^{2\sqrt{x}}.$

13. Se $y = \dfrac{x^3}{1-x}$, $\qquad \dfrac{d^4y}{dx^4} = \dfrac{24}{(1-x)^5}.$

14. Se $y^2 = \sec 2x$, $\qquad y + \dfrac{d^2y}{dx^2} = 3y^5.$

15. Se $y^2(1+x^2) = (1-x+x^2)^2$, $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{1+3x+x^2}{(1+x^2)^{\frac{5}{2}}}.$

16. Se $y = \dfrac{ax+b}{x^2-c^2}$, $\dfrac{d^ny}{dx^n} = \dfrac{(-1)^n\underline{|n}}{2c}\left\{\dfrac{b+ac}{(x-c)^{n+1}} - \dfrac{b-ac}{(x+c)^{n+1}}\right\}.$

17. Se $y = x^n \operatorname{sen} x$,

$$\frac{d^ny}{dx^n} = \underline{|n}\left\{\operatorname{sen} x + \frac{n}{1}x \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{n(n-1)}{\underline{|2}\underline{|2}}x^2 \operatorname{sen}\left(x + \frac{2\pi}{2}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{n(n-1)(n-2)}{\underline{|3}\underline{|3}}x^3 \operatorname{sen}\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) + \text{etc.}\right\}.$$

18. Se $\dfrac{y}{a} = \tan^{-1}\dfrac{x}{a}$,

allora $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{a^2}{a^2+x^2} = \cos^2\dfrac{y}{a}$,

quindi $$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2}{a}\cos\frac{y}{a}\operatorname{sen}\frac{y}{a}\frac{dy}{dx}$$

$$= -\frac{1}{a}\operatorname{sen}\frac{2y}{a}\frac{dy}{dx}$$

$$= \frac{1}{a}\cos\left(\frac{2y}{a}+\frac{\pi}{2}\right)\cos^2\frac{y}{a}.$$

Dimostrare che $\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{2}{a^2}\cos\left(\frac{3y}{a}+2\cdot\frac{\pi}{2}\right)\cos^3\frac{y}{a}$,

e generalmente $\frac{d^ny}{dx^n} = \frac{\lfloor n-1}{a^{n-1}}\cos\left\{\frac{ny}{a}+(n-1)\frac{\pi}{2}\right\}\cos^n\frac{y}{a}$.

Ora si ponga $\tan^{-1}\frac{x}{a} = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\frac{a}{x} = \frac{\pi}{2} - \theta$;

con ciò $\cos\left\{\frac{ny}{a}+(n-1)\frac{\pi}{2}\right\} = \operatorname{sen}\left(\frac{ny}{a}+\frac{n\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}(n\pi - n\theta)$

$= (-1)^{n-1}\operatorname{sen} n\theta$; e $\cos^n\frac{y}{a} = \frac{a^n}{(a^2+x^2)^{\frac{n}{2}}}$;

quindi $$\frac{d^ny}{dx^n} = a\,(-1)^{n-1}\,\frac{\lfloor n-1}{(a^2+x^2)^{\frac{n}{2}}}\operatorname{sen} n\theta.$$

19. Poichè

$$\frac{d\tan^{-1}\frac{x}{a}}{dx} = \frac{a}{a^2+x^2},\quad \frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{1}{a^2+x^2}\right) = \frac{1}{a}\frac{d^{n+1}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)}{dx^{n+1}}.$$

Da ciò, dimostrare che

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{1}{a^2+x^2}\right) = \frac{(-1)^n\lfloor n\operatorname{sen}(n+1)\theta}{a(a^2+x^2)^{\frac{n+1}{2}}},$$

in cui $$\tan\theta = \frac{a}{x}.$$

[L' n^{mo} coefficiente differenziale di $\frac{1}{a^2+x^2}$ rispetto ad x si ottiene alle volte nel seguente modo:

$$\frac{1}{a^2+x^2}=\frac{1}{2a\sqrt{(-1)}}\left\{\frac{1}{x-a\sqrt{(-1)}}-\frac{1}{x+a\sqrt{(-1)}}\right\};$$

quindi

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{1}{a^2+x^2}\right)=\frac{(-1)^n\lfloor n}{2a\sqrt{(-1)}}\left[\frac{1}{\{x-a\sqrt{(-1)}\}^{n+1}}-\frac{1}{\{x+a\sqrt{(-1)}\}^{n+1}}\right].$$

Ora si ponga $x=r\cos\theta$, $a=r\operatorname{sen}\theta$, sicchè

$$r^2=a^2+x^2 \text{ e } \tan\theta=\frac{a}{x}.$$

Allora $\{x+a\sqrt{(-1)}\}^{n+1}=r^{n+1}\{\cos\theta+\sqrt{(-1)}\operatorname{sen}\theta\}^{n+1}$

$$=r^{n+1}\{\cos(n+1)\theta+\sqrt{(-1)}\operatorname{sen}(n+1)\theta\}$$

pel Teorema di De Moivre.

Quindi

$$\frac{1}{\{x-a\sqrt{(-1)}\}^{n+1}}-\frac{1}{\{x+a\sqrt{(-1)}\}^{n+1}}=\frac{2\sqrt{(-1)}\operatorname{sen}(n+1)\theta}{r^{n+1}};$$

ed otteniamo lo stesso risultato come sopra per il proposto n^{mo} coefficiente differenziale.]

20. $$\frac{d^n\dfrac{x}{a^2+x^2}}{dx^n}=x\frac{d^n\left(\dfrac{1}{a^2+x^2}\right)}{dx^n}+n\frac{d^{n-1}\left(\dfrac{1}{a^2+x^2}\right)}{dx^{n-1}}.$$ Art. 80.

Quindi, per mezzo dell'esempio precedente, mostrare che

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{x}{a^2+x^2}\right)=\frac{(-1)^n\lfloor n\cos(n+1)\theta}{(a^2+x^2)^{\frac{n+1}{2}}}$$

[Possiamo procedere anche nel modo indicato nell'esempio precedente, partendo da

$$\frac{x}{a^2+x^2}=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{x+a\sqrt{(-1)}}+\frac{1}{x-a\sqrt{(-1)}}\right\}.$$]

21. Trovare il 4° coefficiente differenziale di $\dfrac{1}{e^x-1}$ e di $e^{-\frac{1}{x^2}}$.

Risultati.

$$\frac{e^x+11e^{2x}+11e^{3x}+e^{4x}}{(e^x-1)^5} \text{ ed } e^{-\frac{1}{x^2}}\{16x^{-12}-144x^{-10}+300x^{-8}-120x^{-6}\}.$$

22. $$\frac{d^n(x^2a^x)}{dx^n}=\{x^2c^n+2nxc^{n-1}+n(n-1)c^{n-2}\}a^x,$$

in cui $c=\log a$. Art. 80.

23. Se $y=\operatorname{sen}(m\operatorname{sen}^{-1}x)$, mostrare che

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}=x\frac{dy}{dx}-m^2y.$$

Applicare il teorema di Leibnitz, Art. 80, e dedurre

$$(1-x^2)\frac{d^{n+2}y}{dx^{n+2}}=(2n+1)x\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}+(n^2-m^2)\frac{d^ny}{dx^n}.$$

24. Se $y=a\cos(\log x)+b\operatorname{sen}(\log x)$, mostrare che

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+y=0,$$

e che $$x^2\frac{d^{n+2}y}{dx^{n+2}}+(2n+1)x\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}+(n^2+1)\frac{d^ny}{dx^n}=0.$$

CAPITOLO VI.

SVILUPPO DELLE FUNZIONI IN SERIE.

84. Il teorema del Binomio ci fornisce una serie procedente secondo le potenze di h, che è equivalente all' espressione $(x+h)^n$. Altre serie si sono presentate nell'Algebra e nella Trigonometria, come lo sviluppo di e^x secondo le potenze di x e di $\log(1+x)$ secondo le potenze di x. Negli articoli precedenti di questo libro, non abbiamo ammesso, però, la conoscenza di alcuno sviluppo, *eccettuato il teorema binomiale nel caso dell' esponente intero e positivo;* ma ci proponiamo ora d'investigare lo sviluppo di $f(x+h)$ secondo le potenze di h, in cui $f(x)$ dinota una funzione qualunque di x, e si vedrà che tutti gli esempî isolati che lo studente ha considerato sinora, non sono che casi particolari di questo teorema generale.

85. Prima di esporre una rigorosa dimostrazione del teorema in questione, indicheremo il metodo che ordinariamente si adottava nei trattati sul Calcolo Differenziale non fondati sulla dottrina dei limiti. Tali trattati cominciavano con una dimostrazione poco soddisfacente della proposizione che $f(x+h)$ potesse generalmente svilupparsi in una serie procedente secondo le potenze positive intere ascendenti di h; rimaneva allora a determinare i coefficienti delle diverse potenze di h, e ciò si otteneva nel modo esposto nei due articoli seguenti.

86. Dobbiamo prima stabilire il teorema seguente. Se $f(x+h)$ è una funzione qualunque di $x+h$, otteniamo lo stesso risultato sia che la differenziamo rispetto ad x, considerando h costante, o la differenziamo rispetto ad h, considerando x costante.

Infatti si ponga $x+h=z$.

Nel primo caso

$$\frac{df(x+h)}{dx}=\frac{df(z)}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}$$
$$=f'(z),$$

poichè
$$\frac{dz}{dx}=1.$$

Nel secondo caso,

$$\frac{df(x+h)}{dh}=\frac{df(z)}{dz}\cdot\frac{dz}{dh}$$
$$=f'(z),$$

poichè
$$\frac{dz}{dh}=1.$$

87. Sviluppare $f(x+h)$ in una serie di potenze ascendenti di h.

Si ammetta (Art. 85) che

$$f(x+h)=A_0+A_1h+A_2h^2+A_3h^3+\ldots\ldots\ldots(1),$$

in cui A_0, A_1, A_2, etc., non contengono h.

Allora

$$\frac{df(x+h)}{dx}=\frac{dA_0}{dx}+h\frac{dA_1}{dx}+h^2\frac{dA_2}{dx}+h^3\frac{dA_3}{dx}+\ldots\ldots(2),$$

e
$$\frac{df(x+h)}{dh}=A_1+2A_2h+3A_3h^2+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3).$$

Per l'Art. 86, le serie (2) e (3) debbono essere eguali. Quindi, eguagliando i coefficienti delle potenze simili di h, abbiamo

$$A_1=\frac{dA_0}{dx},$$
$$A_2=\frac{1}{2}\frac{dA_1}{dx}=\frac{1}{1.2}\frac{d^2A_0}{dx^2},$$
$$A_3=\frac{1}{3}\frac{dA_2}{dx}=\frac{1}{1.2.3}\frac{d^3A_0}{dx^3},$$

....

E ponendo $h=0$ in (1), si ha

$$A_0=f(x).$$

Quindi, sostituendo i valori di A_0, A_1, etc. in (1), abbiamo

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{1.2}f''(x)+\frac{h^3}{1.2.3}f'''(x)+\ldots\ldots (4),$$

il termine generale essendo

$$\frac{h^n}{\underline{|n}}\frac{d^n f(x)}{dx^n}.$$

Questo risultato si dice il Teorema di Taylor.

88. Vi sono molte obiezioni al metodo degli articoli precedenti, e specialmente l'uso di una serie infinita, senza accertare che sia convergente, è inammissibile; procediamo per ciò ad una rigorosa investigazione.

89. Sia $y=F(x)$, e si suppongano Δx e Δy rappresentare gl' incrementi simultanei di x ed y; allora la frazione $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, *poichè essa ha per limite il coefficiente differenziale $F'(x)$, avrà ultimamente lo stesso segno del suo limite se Δx è preso sufficientemente piccolo*, e quindi sarà positiva se il coefficiente differenziale è positivo, e negativa se il coefficiente differenziale è negativo. Nel primo caso, le quantità Δy e Δx essendo dello *stesso* segno, la funzione y crescerà o diminuirà secondo che x cresce o diminuisce. Nel secondo caso, Δy e Δx essendo di segni *contrarii*, y crescerà se x diminuisce e diminuirà se x cresce.

Ciò che si è detto suppone che vi è realmente un limite *finito* al quale tende $\frac{\Delta y}{\Delta x}$; in altri termini noi supponiamo che $F'(x)$ non *sia infinita*. La limitazione che le funzioni da considerare non debbano divenire *infinite* deve essere sottintesa in molti teoremi nelle matematiche, quando non fosse formalmente enunciata. Nel presente soggetto però si usa di stabilire espressamente questa limitazione ne' punti importanti delle investigazioni.

Si può osservare che alle volte possiamo ottenere utili informazioni rispetto al segno di una funzione esaminando il

coefficiente differenziale della funzione. Per esempio, si supponga

$$y = (x-1)\, e^x + 1,$$

allora $$\frac{dy}{dx} = xe^x;$$

siccome $\frac{dy}{dx}$ è positivo per tutti i valori positivi di x, ne segue per il presente articolo che y è sempre crescente finchè x è positiva; ma $y = 0$ quando $x = 0$; quindi *y è positiva per tutt'i valori positivi di x.*

90. Una funzione di una variabile si dice essere *continua* tra certi valori della variabile se la funzione cangia *gradatamente* a misura che la variabile passa da un valore all'altro, così che un cambiamento indefinitamente piccolo della variabile dà origine ad un cangiamento indefinitamente piccolo della funzione. Quindi una funzione *continua* non può divenire infinita tra i valori per i quali essa è continua, poichè nelle vicinanze del valore infinito della funzione per un cangiamento indefinitamente piccolo della variabile il cangiamento nella funzione non è indefinitamente piccolo.

91. Sia $\varphi(x)$ una funzione che svanisce per $x = a$, e per $x = b$, ed è continua tra questi valori. Si supponga inoltre che $\varphi'(x)$ sia continua tra questi valori. Allora $\varphi'(x)$ si annullerà per qualche valore di x compreso tra a e b.

Infatti $\varphi'(x)$ non può essere sempre positiva tra questi valori, perchè allora $\varphi(x)$ sarebbe costantemente crescente a misura che la variabile crescesse dal più piccolo valore al più grande (Art. 89), il che non si accorda con la supposizione che $\varphi(x)$ svanisca per i due indicati valori. Similmente $\varphi'(x)$ non può essere sempre negativa. Quindi $\varphi'(x)$ deve mutare dal positivo al negativo o dal negativo al positivo tra gli assegnati valori; e poichè essa è continua non può divenire infinita e deve per conseguenza passare pel valore zero.

Se a dinota una quantità costante, le espressioni come $f'(a)$, $f''(a)$, etc. che s'incontreranno nelle nostre investigazioni significheranno che $f(x)$ deve essere differenziata una volta, due volte, etc., e nel risultato x si deve cambiare in a.

Possiamo ora dimostrare il Teorema di Taylor. La dimostrazione che diamo nel prossimo articolo è dovuta al Signor

Homersham Cox; essa fu pubblicata nel 6° volume del *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, ed in seguito nel suo *Manual of the Differential Calculus*.

92. Si suppongano $f(a+x)$ ed i suoi coefficienti differenziali sino all'$(n+1)^{mo}$ essere continui tra i valori 0 ed h della variabile x. L'espressione

$$f(a+x)-f(a)-xf'(a)-\frac{x^2}{\underline{|2}}f''(a)\ldots-\frac{x^n}{\underline{|n}}f^n(a)-\frac{x^{n+1}R}{\underline{|n+1}}\ \ldots\ (1),$$

svanisce per $x=h$ se $R=$

$$\frac{\underline{|n+1}}{h^{n+1}}\left\{f(a+h)-f(a)-hf'(a)-\frac{h^2}{\underline{|2}}f''(a)\ldots-\frac{h^n}{\underline{|n}}f^n(a)\right\}\ldots\ (2),$$

Si supponga R avere questo valore che osserviamo è indipendente da x.

L'espressione (1) svanisce anche per $x=0$.

Quindi, per l'Art. 91 il coefficiente differenziale di (1) rispetto ad x deve svanire per qualche valore di x tra 0 ed h; si supponga x_1 questo valore, allora

$$f'(a+x)-f'(a)-xf''(a)\ldots-\frac{x^{n-1}}{\underline{|n-1}}f^n(a)-\frac{x^n}{\underline{|n}}R\ \ldots\ldots\ (3),$$

svanisce per $x=x_1$. Ma (3) svanisce anche per $x=0$; quindi vi è qualche valore di x tra 0 ed x_1 pel quale il coefficiente differenziale di (3) si annulla.

Continuando questo procedimento sino a $n+1$ differenziazioni di (1) troviamo che $f^{n+1}(a+x)-R$ è zero per qualche valore di x tra 0 ed h; sia questo valore di x θh, in cui θ è una frazione propria, onde

$$R=f^{n+1}(a+\theta h).$$

Si sostituisca questo valore di R in (2) ed abbiamo

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{\underline{|2}}f''(a)\ldots+\frac{h^n}{\underline{|n}}f^n(a)$$
$$+\frac{h^{n+1}}{\underline{|n+1}}f^{n+1}(a+\theta h).$$

Possiamo ora porre x invece di a in questa equazione, poichè

non vi è stata alcuna restrizione nel valore di a, eccettuato che tutte le quantità debbono essere *finite*, così otteniamo

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{\lfloor 2}f''(x)+\ldots+\frac{h^n}{\lfloor n}f^n(x)$$
$$+\frac{h^{n+1}}{\lfloor n+1}f^{n+1}(x+\theta h)\ldots(4).$$

Se la funzione $f^{n+1}(x+\theta h)$ è tale che prendendo n sufficientemente grande il termine $\frac{h^{n+1}}{\lfloor n+1}f^{n+1}(x+\theta h)$ può rendersi tanto piccolo quanto ci aggrada, allora continuando la serie

$$f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{\lfloor 2}f''(x)+\frac{h^3}{\lfloor 3}f'''(x)+\text{etc.},$$

sino a quel numero di termini che ci piace, otteniamo un risultato che differisce tanto poco quanto si vuole da $f(x+h)$. In queste circostanze adunque possiamo asserire la verità del Teorema di Taylor.

93. Il Teorema di Taylor è così chiamato dal suo scopritore Dr. Brook Taylor; esso fu pubblicato la prima volta nel 1715. Il teorema contenuto nell'equazione (4) dell'Art. 92 è detto *il Teorema di Lagrange sui limiti del Teorema di Taylor*. Esso ci dà un'espressione per la differenza tra $f(x+h)$ ed i primi $n+1$ termini del suo sviluppo col Teorema di Taylor, ovvero come è chiamato « il resto dopo $n+1$ termini. »

94. All'espressione $f^{n+1}(x+\theta h)$ che s'incontra nell'Art. 92, possiamo assegnare il significato seguente. « Si differenzii $f(x)$ $n+1$ volte, e nel risultato finale si muti x in $x+\theta h$. » Non conosciamo altra cosa di θ, se non che esso giace tra 0 ed 1; esso sarà generalmente una funzione di x ed h, e quindi, differenziare $f(x+\theta h)$ rispetto ad x, non è la stessa cosa che differenziare $f(x)$ rispetto ad x e poi mutare x in $x+\theta h$.

95. Teorema di Maclaurin.

Nell'equazione

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2}f''(x)+\ldots+\frac{h^nf^n(x)}{\lfloor n}$$
$$+\frac{h^{n+1}}{\lfloor n+1}f^{n+1}(x+\theta h),$$

si ponga $x = 0$, abbiamo allora

$$f(h) = f(0) + hf'(0) + \dots + \frac{h^n f^n(0)}{\lfloor n} + \frac{h^{n+1}}{\lfloor n+1} f^{n+1}(\theta h).$$

Possiamo, se ci piace, cambiare h in x, e poichè le quantità $f(0)$, $f'(0), \dots \dots f^n(0)$, non contengono x o h, non si fa alcun cangiamento in esse: quindi

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \dots + \frac{x^n f^n(0)}{\lfloor n} + \frac{x^{n+1}}{\lfloor n+1} f^{n+1}(\theta x).$$

Allorchè l'ultimo termine, prendendo n grande abbastanza, può rendersi tanto piccolo quanto ci piace, abbiamo per $f(x)$ una serie infinita che procede secondo le potenze ascendenti di x. Questa serie è usualmente chiamata di Maclaurin, essendo stata pubblicata da lui nel 1742; sebbene essendo stata data alcuni anni prima dà Stirling, essa alle volte porti il nome di quest' ultimo.

96. Ammettendo che ogni funzione di x possa essere sviluppata in una serie di potenze intere positive di x, è stato dato il seguente metodo per dimostrare il Teorema di Maclaurin.

Sia $f(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 \dots \dots + A_n x^n + \dots \dots$

in cui A_0, A_1, A_2, etc. non contengono x.

Si differenzii successivamente, allora

$$f'(x) = A_1 + 2A_2 x + \dots + nA_n x^{n-1} + \dots \dots$$

$$f''(x) = 2A_2 + 2.3A_3 x + \dots + n(n-1)\, A_n x^{n-2} + \dots \dots$$

$$f'''(x) = 2.3A_3 + \dots + n\,(n-1)\,(n-2)\, A_n x^{n-3} + \dots \dots$$

. . . .

Ora si supponga $x = 0$ in ciascuna di queste equazioni, ed abbiamo

$$A_0 = f(0),$$

$$A_1 = f'(0),$$

$$A_2 = \frac{1}{1.2} f''(0),$$

$$A_3 = \frac{1}{1.2.3} f'''(0),$$

. . . .

Si sostituiscano i valori di A_0, A_1, etc. e si ottiene

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{1.2}f''(0) + \dots + \frac{x^n}{\lfloor n}f^n(0) + \text{etc.}$$

97. La dimostrazione data dell'equazione (4) nell'Art. 92, equazione che racchiude il Teorema di Taylor, ed anzi può essere chiamata il Teorema di Taylor, probabilmente non lascerà soddisfatto il lettore. Quantunque egli non possa scoprire verun difetto nel ragionamento, pure si dispiacerà del carattere artificioso ed incerto dell'insieme, e muoverà la stessa obiezione rispetto al metodo di dimostrazione di Cauchy che or ora daremo. Senza negare la giustizia di queste obiezioni, possiamo rispondere che il carattare altamente generale del teorema può in un certo modo far scusare la complicata ed indiretta natura dell'investigazione. Ma riguardo particolarmente alla mancanza di soddisfazione provata nell'essere costretto di dare l'assenso ad un certo numero di proposizioni senza conoscere dapprima quale si possa aspettare che sia l'andamento generale della dimostrazione, rammenteremo allo studente che mentre egli apprende gli elementi di un soggetto non deve aspettarsi di essere capace, in modo di dire, di *scoprire di nuovo il teorema da se stesso.* Invece di domandare, « cosa ha suggerito questo o quel passo? » egli deve spesso contentarsi della semplice questione « è il ragionamento esatto? » A ciò naturalmente, forse senza saperlo, egli è stato già avvezzato; per esempio, se una costruzione complicata incontrava nell'Euclide, egli si limitava semplicemente, almeno per qualche tempo, ad esaminare la validità della costruzione, e la verità delle deduzioni ricavato da essa, senza tentare di riconoscere i passi che condussero Euclide alla sua costruzione.

98. A motivo dell'importanza del Teorema di Taylor aggiungeremo un'altra dimostrazione; questa dimostrazione è dovuta a Cauchy, ed è data nella forma seguente da Moigno.

Siano $F(x)$ ed $f(x)$ due funzioni di x che rimangono continue, del pari che i loro coefficienti differenziali, tra i valori x_1 ed x_1+h della variabile x. Si supponga inoltre che tra questi stessi valori la funzione derivata $f'(x)$ non muti di segno, o in altri termini che tra questi valori la funzio-

ne $f(x)$ continuamente aumenti, o continuamente diminuisca. Allora la frazione

$$\frac{F(x_1+h)-F(x_1)}{f(x_1+h)-f(x_1)}$$

sarà eguale al valore di

$$\frac{F'(x)}{f'(x)},$$

allorchè in quest'ultima x ha un certo valore compreso tra i valori indicati; vale a dire, θ dinotando una frazione propria, avremo

$$\frac{F(x_1+h)-F(x_1)}{f(x_1+h)-f(x_1)}=\frac{F'(x_1+\theta h)}{f'(x_1+\theta h)}.$$

Infatti siano A e B i valori algebricamente minimo e massimo che la frazione

$$\frac{F'(x)}{f'(x)}$$

può prendere tra i valori x_1 ed x_1+h; le due espressioni

$$\frac{F'(x)}{f'(x)}-A,$$

ed

$$\frac{F'(x)}{f'(x)}-B,$$

avranno perciò segni contrarii, *ognuna di esse ritenendo il suo segno immutato.* Lo stesso si avrà per

$$F'(x)-Af'(x),$$

ed

$$F'(x)-Bf'(x),$$

poichè $f'(x)$ è immutabile nel segno. Ma queste espressioni sono i coefficienti differenziali delle due funzioni

$$F(x)-Af(x),$$

ed

$$F(x)-Bf(x).$$

Di queste ultime funzioni perciò, l'una deve crescere costantemente e l'altra decrescere, (Art. 89). Quindi, sottraendo i loro valori iniziali dai loro valori finali,

$$F(x_1+h)-F(x_1)-A\{f(x_1+h)-f(x_1)\},$$

ed $$F(x_1+h)-F(x_1)-B\{f(x_1+h)-f(x_1)\},$$

saranno, l'una positiva e l'altra negativa.

Adunque

$$\frac{F(x_1+h)-F(x_1)}{f(x_1+h)-f(x_1)}-A,$$

ed $$\frac{F(x_1+h)-F(x_1)}{f(x_1+h)-f(x_1)}-B,$$

sono di segni contrarii.

Poichè $\frac{F(x_1+h)-F(x_1)}{f(x_1+h)-f(x_1)}$ è maggiore di A e minore di B, essa deve essere compresa tra il valore massimo ed il minimo di $\frac{F'(x)}{f'(x)}$. Di più, questa frazione, passando dal suo valore massimo al suo valore minimo, deve passare per tutti i valori intermedii. Quindi vi deve essere *una frazione propria* θ, tale che

$$\frac{F(x_1+h)-F(x_1)}{f(x_1+h)-f(x_1)}=\frac{F'(x_1+\theta h)}{f'(x_1+\theta h)}.$$

99. Il risultato dell'articolo precedente è stato ottenuto supponendo che le funzioni siano continue e che $f'(x)$ *sia di segno invariabile* tra i valori x_1 ed x_1+h della variabile x. Il risultato però è vero se le funzioni sono continue e *l'una o l'altra* delle due $F'(x)$ ed $f'(x)$ è di segno invariabile. Infatti se $F'(x)$ è di segno invariabile possiamo dimostrare come nell'articolo precedente che

$$\frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{F(x_1+h)-F(x_1)}=\frac{f'(x_1+\theta h)}{F'(x_1+\theta h)},$$

e da ciò naturalmente segue che

$$\frac{F(x_1+h)-F(x_1)}{f(x_1+h)-f(x_1)}=\frac{F'(x_1+\theta h)}{f'(x_1+\theta h)}.$$

Il lettore il quale desidera di vedere l'applicazione di questo risultato allo stabilimento del Teorema di Taylor, può passare immediatamente all'Art. 106, per poi ritornare alla considerazione degli articoli omessi, nei quali daremo un'altra dimostrazione del risultato, ed inoltre alcune illustrazioni geometriche.

100. L'enunciato dell'Art. 98 essendo supposto, possiamo disporre la dimostrazione come segue:

Si divida h in un certo numero di parti eguali, e dinoti α una di queste parti. Si considerino le frazioni

$$\frac{F(x_1+\alpha)-F(x_1)}{f(x_1+\alpha)-f(x_1)},\ \frac{F(x_1+2\alpha)-F(x_1+\alpha)}{f(x_1+2\alpha)-f(x_1+\alpha)},\ \frac{F(x_1+3\alpha)-F(x_1+2\alpha)}{f(x_1+3\alpha)-f(x_1+2\alpha)},$$
$$\ldots\frac{F(x_1+h)-F(x_1+h-\alpha)}{f(x_1+h)-f(x_1+h-\alpha)}\ldots\ldots\ldots\ldots\ (1).$$

Si formi una nuova frazione aggiungendo insieme tutt'i numeratori in (1) per un nuovo numeratore, e tutt'i denominatori in (1) per un nuovo denominatore. Otteniamo così

$$\frac{F(x_1+h)-F(x_1)}{f(x_1+h)-f(x_1)}\ldots\ldots\ldots\ldots\ (2).$$

Poichè i denominatori che si trovano in (1) hanno per ipotesi tutti lo stesso segno, sappiamo dall'algebra che la frazione (2) *giace in valore tra il massimo ed il minimo di quelli in* (1). Ora

$$\frac{F(x_1+\alpha)-F(x_1)}{f(x_1+\alpha)-f(x_1)}=\frac{\dfrac{F(x_1+\alpha)-F(x_1)}{\alpha}}{\dfrac{f(x_1+\alpha)-f(x_1)}{\alpha}};$$

se dunque poniamo questa frazione eguale ed

$$\frac{F'(x_1)}{f'(x_1)}+\beta,$$

sappiamo che β diminuisce senza limite al diminuire di α.

Similmente

$$\frac{F(x_1+2\alpha)-F(x_1+\alpha)}{f(x_1+2\alpha)-f(x_1+\alpha)}=\frac{F'(x_1+\alpha)}{f'(x_1+\alpha)}+\gamma,$$
$$\frac{F(x_1+3\alpha)-F(x_1+2\alpha)}{f(x_1+3\alpha)-f(x_1+2\alpha)}=\frac{F'(x_1+2\alpha)}{f'(x_1+2\alpha)}+\delta,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\ldots$$
$$\frac{F(x_1+h)-F(x_1+h-\alpha)}{f(x_1+h)-f(x_1+h-\alpha)}=\frac{F'(x_1+h-\alpha)}{f'(x_1+h-\alpha)}+\mu,$$

in cui $\gamma, \delta, \ldots \mu$, diminuiscono senza limite al diminuire di α.

Poichè la frazione in (2) giace sempre tra il valore massimo ed il minimo dei termini della serie

$$\frac{F'(x_1)}{f'(x_1)}+\beta,\ \frac{F'(x_1+\alpha)}{f'(x_1+\alpha)}+\gamma,\ \frac{F'(x_1+2\alpha)}{f'(x_1+2\alpha)}+\delta,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \frac{F'(x_1+h-\alpha)}{f'(x_1+h-\alpha)}+\mu,$$

essa deve giacere tra il massimo ed il minimo dei limiti verso i quali essi tendono; vale a dire, deve giacere tra il massimo ed il minimo dei valori che $\frac{F'(x)}{f'(x)}$ può prendere tra x_1 ed x_1+h. Ma siccome $\frac{F'(x)}{f'(x)}$, nel passare dal suo massimo al suo minimo valore, passa per tutti i valori intermedii, vi deve essere una frazione propria θ, tale che

$$\frac{F(x_1+h)-F(x_1)}{f(x_1+h)-f(x_1)}=\frac{F'(x_1+\theta h)}{f'(x_1+\theta h)}.$$

101. Si supponga $f(x)=x-x_1$;

onde $f'(x)=1.$

Le condizioni richieste che debbono essere soddisfatte da $f(x)$ nell'enunciato dell'Art. 98 sono verificate. E siccome

$$f(x_1+h)=h,$$

ed $f(x_1)=0,$

abbiamo $F(x_1+h)-F(x_1)=hF'(x_1+\theta h).$

Questo caso semplice dell'Art. 98 può del resto essere dimostrato nello stesso modo col quale fu stabilita la proposizione generale.

102. Il risultato dell'Art. 101 può essere applicato a mostrare che un'espressione *indipendente* da x è la sola di cui il coefficiente differenziale rispetto ad x sia sempre zero. Infatti si supponga $F(x)$ una funzione, tale che $F'(x)$ sia sem-

pre zero; allora, dall'ultima equazione nell'Art. 101 segue, qualunque siano i valori di x_1 ed x_1+h, che

$$F(x_1+h)-F(x_1)=0,$$

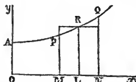
onde $$F(x_1+h)=F(x_1).$$

Quindi la funzione $F(x)$ ha sempre lo stesso valore qualunque sia il valore della variabile; vale a dire, essa è costante rispetto ad x, o in altri termini non dipende da x.

Da ciò segue, che due funzioni le quali hanno lo stesso coefficiente differenziale rispetto ad una variabile qualunque possono differire solamente per una costante. Infatti il coefficiente differenziale della differenza fra queste funzioni essendo sempre zero, segue da ciò che abbiamo ora dimostrato che tale differenza è una costante.

103. Il risultato dell'Art. 101 ammette la seguente semplice verificazione geometrica.

Abbiamo già mostrato, Art. 43, che se u rappresenta l'area contenuta tra gli assi delle x e delle y, l'ordinata y, ed una curva qualunque, allora



$$\frac{du}{dx}=y.$$

Sia $u=F(x)$, onde $y=F'(x)$ è l'equazione della curva; sia $OM=x_1$, $MN=h$;

allora $$\text{area } OAPM=F(x_1),$$

$$\text{area } OAQN=F(x_1+h),$$

quindi $$\text{area } PQNM=F(x_1+h)-F(x_1).$$

Ora è chiaro che un punto R deve esistere tra P e Q, tale che, tirando l'ordinata RL,

$$\text{rettangolo } RL.MN=\text{area } PQNM.$$

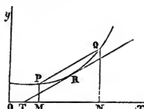
Ma $$RL=F'(x_1+\theta h),$$

in cui θ è una frazione propria; adunque

$$hF'(x_1+\theta h)=F(x_1+h)-F(x_1).$$

104. La seguente è un' altra illustrazione geometrica dell' Art. 101.

Se $y = F(x)$ è l'equazione di una curva, allora $F'(x)$ è la tangente trigonometrica dell' angolo tra l' asse delle x e la tangente della curva nel punto (x, y). Art. 38.



Sia $OM = x_1$, $MN = h$,

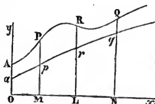
allora $\dfrac{F(x_1 + h) - F(x_1)}{h}$

è la tangente dell' inclinazione della corda PQ all' asse delle x. Quindi l' Art. 101 equivale all' asserire che *in un certo punto R tra P e Q la tangente RT della curva è parallela a PQ.*

Noi chiamiamo questa una *illustrazione*. Quando, però, lo studente ha sufficientemente considerata la natura della tangente ad una curva, ciò può equivalere ad una *dimostrazione* della proposizione di cui si tratta.

105. La seguente è un' *illustrazione* della proposizione generale nell' Art. 98.

Siano due curve APQ ed apq. Dinoti $F(x)$ l' area contenuta tra la prima curva, gli assi delle x e delle y e l' ordinata corrispondente ad un' ascissa x; allora $y = F'(x)$ è l' equazione di questa curva. Dinoti $f(x)$ una simile area rispetto alla seconda curva; allora $y = f'(x)$ è l' equazione di questa curva.



Sia $OM = x_1$, $MN = h$.

Allora $\quad F(x_1 + h) - F(x_1) = \text{area } PMNQ,$

$f(x_1 + h) - f(x_1) = \text{area } pMNq.$

Quindi l' equazione

$$\frac{F(x_1 + h) - F(x_1)}{f(x_1 + h) - f(x_1)} = \frac{F'(x_1 + \theta h)}{f'(x_1 + \theta h)}$$

equivale ad asserire che deve esistere un certo punto R tra P e Q, tale che

$$\frac{\text{area } PMNQ}{\text{area } pMNq} = \frac{RL}{rL}.$$

106. Si supponga ora che $F(x)$ ed $f(x)$ e tutti i loro coefficienti differenziali sino all'$(n+1)^{mo}$ inclusivamente, siano continui tra i valori x_1 ed x_1+h della variabile x; inoltre si supponga che uno dei due $F'(x)$ ed $f'(x)$ sia di segno invariabile tra gli stessi valori, similmente uno dei due $F''(x)$, ed $f''(x)$, e così di seguito sino ad $F^{n+1}(x)$ ed $f^{n+1}(x)$. Allora, per l'Art. 99.

$$\frac{F(x_1+h)-F(x_1)}{f(x_1+h)-f(x_1)}=\frac{F'(x_1+\theta_1 h)}{f'(x_1+\theta_1 h)},$$

$$\frac{F'(x_1+\theta_1 h)-F'(x_1)}{f'(x_1+\theta_1 h)-f'(x_1)}=\frac{F''(x_1+\theta_2 h)}{f''(x_1+\theta_2 h)},$$

$$\frac{F''(x_1+\theta_2 h)-F''(x_1)}{f''(x_1+\theta_2 h)-f''(x_1)}=\frac{F'''(x_1+\theta_3 h)}{f'''(x_1+\theta_3 h)},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{F^n(x_1+\theta_n h)-F^n(x_1)}{f^n(x_1+\theta_n h)-f^n(x_1)}=\frac{F^{n+1}(x_1+\theta h)}{f^{n+1}(x_1+\theta h)};$$

in cui $\theta_1, \theta_2, \ldots\ldots \theta_n, \theta$, sono tutte frazioni proprie.

Supponiamo ora che $F'(x)$, $F''(x)$, ... $F^n(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, ... $f^n(x)$ *svaniscano tutte* per $x=x_1$; allora per le equazioni precedenti

$$\frac{F(x_1+h)-F(x_1)}{f(x_1+h)-f(x_1)}=\frac{F^{n+1}(x_1+\theta h)}{f^{n+1}(x_1+\theta h)}.$$

107. Le condizioni necessarie riguardo ad $f(x)$ saranno verificate se prendiamo

$$f(x)=(x-x_1)^{n+1},$$

onde

$$f^{n+1}(x)=\underline{|n+1},$$

$$f(x_1)=0,$$

$$f(x_1+h)=h^{n+1}.$$

Se dunque i coefficienti differenziali di $F(x)$ sino all'n^{mo} inclusivamente, svaniscono per $x=x_1$, abbiamo, per l'Art. 106,

$$F(x_1+h)-F(x_1)=\frac{h^{n+1}}{\underline{|n+1}}F^{n+1}(x_1+\theta h).$$

Si supponga $x_1 = 0$ ed $F(x_1) = 0$, allora

$$F(h) = \frac{h^{n+1}}{\lfloor n+1} F^{n+1}(\theta h).$$

Sarà bene per distinzione di ripetere le condizioni richieste per l'ultimo risultato; esse sono solamente queste; $F(x)$ ed i suoi coefficienti differenziali sino all' $(n+1)^{mo}$ inclusivamente, debbono essere tutti continui tra i valori 0 ed h di x, e sino all'n^{mo} inclusivamente debbono tutti svanire per $x = 0$.

108. Applicazione al Teorema di Taylor.

Sia $\varphi(x+h)$ una funzione che debba svilupparsi in una serie di potenze intere positive ascendenti di h. Sia

$$\varphi(x+h) - \varphi(x) - h\varphi'(x) - \frac{h^2}{\lfloor 2}\varphi''(x) \ldots - \frac{h^n}{\lfloor n}\varphi^n(x) = F(h).$$

Allora $F(h)$ ed i suoi coefficienti differenziali rispetto ad h, sino all'n^{mo} inclusivamente, svaniscono per $h = 0$. Inoltre

$$F^{n+1}(h) = \varphi^{n+1}(x+h).$$

Adunque, per l'ultima equazione dell'Art. 107,

$$F(h) = \frac{h^{n+1}}{\lfloor n+1} F^{n+1}(\theta h) = \frac{h^{n+1}}{\lfloor n+1} \varphi^{n+1}(x+\theta h),$$

e quindi

$$\varphi(x+h) = \varphi(x) + h\varphi'(x) + \frac{h^2}{\lfloor 2}\varphi''(x) \ldots + \frac{h^n}{\lfloor n}\varphi^n(x)$$
$$+ \frac{h^{n+1}}{\lfloor n+1}\varphi^{n+1}(x+\theta h).$$

Da ciò segue il Teorema di Taylor sempre che la funzione è tale che, crescendo sufficientemente n, il termine

$$\frac{h^{n+1}}{\lfloor n+1}\varphi^{n+1}(x+\theta h)$$

può essere reso tanto piccolo quanto ci piace.

109. La dimostrazione seguente del Teorema di Taylor merita di essere notata, come dipendente soltanto dall'equazione dimostrata geometricamente nell'Art. 103. Sia indicata

$$\varphi(z)-\varphi(x)-(z-x)\varphi'(x)-\frac{(z-x)^2}{\lfloor 2}\varphi''(x)\ldots-\frac{(z-x)^n}{\lfloor n}\varphi^n(x)$$

con $F(x)$, allora

$$F'(x)=-\frac{(z-x)^n}{\lfloor n}\varphi^{n+1}(x).$$

Ora, per l'Art. 103,

$$F(x)=F(z)+(x-z)F'\{z+\theta(x-z)\}.$$

Inoltre $$F(z)=0,$$

ed $$F'\{z+\theta(x-z)\}=-\frac{\theta^n(z-x)^n}{\lfloor n}\varphi^{n+1}\{z+\theta(x-z)\};$$

quindi $$\varphi(z)-\varphi(x)-(z-x)\varphi'(x)-\frac{(z-x)^2}{\lfloor 2}\varphi''(x)$$

$$\ldots\ldots-\frac{(z-x)^n}{\lfloor n}\varphi^n(x)$$

$$=\frac{\theta^n(z-x)^{n+1}}{\lfloor n}\varphi^{n+1}\{z+\theta(x-z)\}.$$

Si ponga h per $z-x$, allora

$$\varphi(x+h)=\varphi(x)+h\varphi'(x)+\frac{h^2}{\lfloor 2}\varphi''(x)\ldots\ldots+\frac{h^n}{\lfloor n}\varphi^n(x)$$

$$+\frac{\theta^n h^{n+1}}{\lfloor n}\varphi^{n+1}(x+h-\theta h).$$

110. Il risultato dell'articolo precedente ci dà un'espressione per il resto dopo $n+1$ termini dello sviluppo di $\varphi(x+h)$, che differisce nella forma da quello trovato precedentemente. Se poniamo $\theta=1-\theta_1$, il resto diventa

$$\frac{(1-\theta_1)^n h^{n+1}}{\lfloor n}\varphi^{n+1}(x+\theta_1 h).$$

111. Nelle dimostrazioni date del Teorema di Taylor, si è supposto che tutte le funzioni che vi si trovano siano continue. Se la funzione che vogliamo sviluppare, o alcuno dei

suoi coefficienti differenziali sino all'$(n+1)^{mo}$ inclusivamente, sia infinito per valori della variabile compresi tra certi valori, la dimostrazione data del teorema

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)\ldots\ldots+\frac{h^n}{\lfloor n}f^n(x)+\frac{h^{n+1}}{\lfloor n+1}f^{n+1}(x+\theta h),$$

non è più valida. Si suole parlare dei casi nei quali entra un valore infinito come « esempii nei quali il Teorema di Taylor è in difetto ». La frase si connette al modo imperfetto di dimostrazione dato negli Art. 86 ed 87, nel quale non era stabilito prima di tutto quando il teorema supposto già dimostrato fosse realmente vero e quando no. Per esempio, si supponga

$$f(x)=\sqrt{(x-a)},$$
$$f(x+h)=\sqrt{(x-a+h)}.$$

Allora si direbbe che $f(x+h)$ può essere *sempre* sviluppata in una serie di potenze positive intere di h, *eccetto* quando $x=a$.

Quando $x=a$, $f'(x)$, $f''(x)$, etc. diventano tutti infiniti ed $f(x+h)$ diviene $\sqrt{h}$.

112. In quel sistema di trattare il Calcolo Differenziale di cui è parola nell' Art. 85, si era solito di esprimere, o implicare, due proposizioni rispetto al « cadere in difetto del Teorema di Taylor ».

(1) Se il *vero* sviluppo di $f(a+h)$ secondo le potenze di h contiene solamente potenze positive intere di h, allora nessuna delle quantità $f(a)$, $f'(a)$, $f''(a)\ldots$ può essere infinita.

(2) Se il *vero* sviluppo di $f(a+h)$ secondo le potenze di h racchiude potenze negative o frazionarie di h, allora *alcuna* delle quantità $f(a)$, $f'(a)$, $f''(a)$, etc., è infinita, come anche tutte quelle che le succedono.

Per il *vero* sviluppo di $f(a+h)$ s' intende lo sviluppo ottenuto per mezzo di qualche legittimo procedimento algebrico, applicabile all' esempio in quistione, come per esempio il teorema del binomio. La dimostrazione delle due precedenti proposizioni era data nel seguente modo.

Si supponga $f(a+h)=A_0+A_1h^\alpha+A_2h^\beta+A_3h^\gamma+\ldots\ldots$ essere il vero sviluppo, A_0, A_1, etc., non contenendo h. Allora per ottenere $f'(a)$, $f''(a)$, etc., possiamo differenziare $f(a+h)$ successivamente rispetto ad h, e porre $h=0$ nel risultato.

Se dunque $\alpha, \beta, \gamma, \ldots\ldots$ sono tutti interi positivi, non avremo mai potenze *negative* di h introdotte con la successiva differenziazione di $f(a+h)$. Quindi, ponendo $h=0$, non s'introducono valori *infiniti*.

Ma se alcuno degli esponenti α, β, γ, etc., è negativo, $f(a+h)$ e tutti i suoi coefficienti differenziali contengono potenze negative di h, e quindi $f(a)$, $f'(a)$, $f''(a)$, etc., sono tutti infiniti.

Se nessuno degli esponenti è negativo, ma uno o più tra essi siano frazioni positive, si supponga γ la più piccola di queste frazioni, e che sia compresa tra gl'interi n ed $n+1$. Allora $f(a+h)$ e tutt' i suoi coefficienti differenziali sino all' n^{mo} inclusivamente sono liberi da potenze negative di h; ma $f^{n+1}(a+h)$ e tutti i coefficienti differenziali seguenti le contengono. Quindi $f^{n+1}(a)$ è il primo coefficiente differenziale che diviene infinito, e tutti i coefficienti differenziali seguenti sono infiniti.

113. Si farà uso in seguito dell' osservazione che se per un valore finito della variabile una funzione diviene infinita, accade lo stesso pel coefficiente differenziale della funzione. In prova di ciò, è sufficiente notare i differenti casi che possono darsi. Una funzione *algebrica* può solamente divenire infinita, per un valore finito della variabile, avendo la forma di una frazione il denominatore della quale svanisce. Ora quando differenziamo una frazione non togliamo mai il denominatore, così che il coefficiente differenziale ha anche un denominatore evanescente, e per conseguenza diviene infinito. Similmente, il 2°, 3°, etc. coefficiente differenziale sono anche infiniti.

Le funzioni trascendenti $\log x$ ed $a^{\frac{1}{x}}$, le quali diventano entrambe infinite quando $x=0$, hanno i loro coefficienti differenziali, cioè $\frac{1}{x}$ e $-\frac{\log x}{x^2}\, a^{\frac{1}{x}}$, anche infiniti per $x=0$.

Le funzioni trigonometriche, come $\tan x$ e $\sec x$, le quali possono divenire infinite, sono forme frazionarie, e cadono sotto le osservazioni già fatte.

La proposizione non è necessariamente vera per le funzioni che diventano infinite per un valore *infinito* della variabile, come può vedersi nel caso di $\log x$, che è infinito quando x è infinito, mentre il suo coefficiente differenziale $\frac{1}{x}$ svanisce.

ESEMPII DIVERSI.

1. Se $y = \tan^{-1}\dfrac{a+bx}{b-ax}$. $\quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{1+x^2}$.

2. Se $y = x\tan^{-1}\dfrac{1}{x}$, $\quad \dfrac{dy}{dx} = \tan^{-1}\dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{1+x^2}$.

3. Se $y = \log\dfrac{\sqrt{(x^2+a^2)} + \sqrt{(x^2+b^2)}}{\sqrt{(x^2+a^2)} - \sqrt{(x^2+b^2)}}$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{\sqrt{(x^2+a^2)}\sqrt{(x^2+b^2)}}.$$

4. Se $y = \dfrac{\sqrt{(1-x^2)}\,e^{\text{sen}^{-1}x}}{\sqrt{(1-x^2)}+x}$, $\quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x\,e^{\text{sen}^{-1}x}}{\sqrt{(1-x^2)}}\,\dfrac{\sqrt{(1-x^2)}-x}{\{\sqrt{(1-x^2)}+x\}^2}$.

5. Se $y = \left(\dfrac{\text{sen}\,x}{x}\right)^{\frac{x}{\text{sen}\,x}}$; $\quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y(x\cos x - \text{sen}\,x)}{\text{sen}^2 x}\log\dfrac{e\,x}{\text{sen}\,x}$,

6. Se $f(x) = \left(\dfrac{a+x}{b+x}\right)^{a+b+2x}$, $f'(0) = \left\{2\log\dfrac{a}{b} + \dfrac{b^2-a^2}{ab}\right\}\left(\dfrac{a}{b}\right)^{a+b}$.

7. Se $y = \sqrt[3]{\{(x-a)^2(x-c)\}}$, $\quad \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{-2(a-c)^2 y}{9(x-a)^2(x-c)^2}$,

8 Se $x = a\cos\theta + b\,\text{sen}\,\theta$, ed $y = a\,\text{sen}\,\theta - b\cos\theta$, allora

$$\frac{d^m x}{d\theta^m}\frac{d^n y}{d\theta^n} - \frac{d^n x}{d\theta^n}\frac{d^m y}{d\theta^m}$$

è indipendente da θ.

9. Se $\cos^{-1}\dfrac{y}{a} = \log\left(\dfrac{x}{b}\right)^n$, allora

$$x^2\frac{d^{n+2}y}{dx^{n+2}} + (2n+1)\,x\,\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} + 2n^2\frac{d^n y}{dx^n} = 0.$$

10. Mostrare che $(x-2)\,e^x + x + 2$ è positiva per tutti i valori positivi di x.

CAPITOLO VII.

ESEMPII DI SVILUPPO DI FUNZIONI.

114. Applicheremo da principio le formole del capitolo precedente a sviluppare alcune funzioni.

Si cerchi lo sviluppo di $(1+x)^m$, non essendo supposto m essere un intero positivo.

Se $f(x)=(1+x)^m$,

si ha $f'(x)=m(1+x)^{m-1}$,

$$f''(x)=m(m-1)(1+x)^{m-2},$$

. . . .

$$f^n(x)=m(m-1)\ldots(m-n+1)(1+x)^{m-n},$$

$$f^{n+1}(x)=m(m-1)\ldots(m-n)(1+x)^{m-n-1};$$

onde $f(0)=1,\quad f'(0)=m,\quad f''(0)=m(m-1)$, etc.

Quindi, per l'Art. 95,

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{1.2}x^2+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{\lfloor n}x^n$$

$$+\frac{x^{n+1}}{\lfloor n+1}m(m-1)\ldots(m-n)(1+\theta x)^{m-n-1}.$$

Se x è minore di 1 l'ultimo termine si può rendere tanto piccolo quanto ci piace crescendo sufficientemente n, ed in questo caso la serie infinita

$$1+mx+\frac{m(m-1)}{1.2}x^2+\text{etc.}$$

prendendo un numero sufficiente di termini, si può rendere tanto prossima ad $(1+x)^m$ quanto ci piace.

115. Sia $$f(x) = a^x.$$

Per gli Art. 95 e 79, abbiamo

$$a^x = 1 + x\log a + \frac{x^2}{1.2}(\log a)^2 + \ldots + \frac{x^n}{\lfloor n}(\log a)^n + \frac{x^{n+1}a^{\theta x}(\log a)^{n+1}}{\lfloor n+1}.$$

Quindi, cambiando a in e, e rammentandosi che

$$\log e = 1,$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{\lfloor 3} + \ldots + \frac{x^n}{\lfloor n} + \frac{x^{n+1}e^{\theta x}}{\lfloor n+1}.$$

Il termine $\frac{x^{n+1}e^{\theta x}}{\lfloor n+1}$ può essere reso tanto piccolo quanto si vuole crescendo sufficientemente n. Quindi possiamo scrivere

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{\lfloor 3} + \text{etc.},\ \textit{all'inf.}$$

Si ponga $x = 1$, ed abbiamo

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{\lfloor 3} + \frac{1}{\lfloor 4} + \text{etc.}$$

Questa serie può essere usata per calcolare il valore approssimato di e, e possiamo mostrare per mezzo di essa che e deve essere un numero *incommensurabile.*

116. Sia $$f(x) = \operatorname{sen} x.$$

Per gli Art. 95 e 78,

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{\lfloor 3} + \frac{x^5}{\lfloor 5} - \ldots\ldots + \frac{x^n}{\lfloor n}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{x^{n+1}}{\lfloor n+1}\operatorname{sen}\left(\frac{n+1}{2}\pi + \theta x\right).$$

Similmente

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{\lfloor 4} - \ldots + \frac{x^n}{\lfloor n}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{x^{n+1}}{\lfloor n+1}\cos\left(\frac{n+1}{2}\pi + \theta x\right).$$

Negli Art. 115 e 116, lo studente vedrà che l'ultimo termine può rendersi tanto piccolo quanto ci piace, qualunque sia il valore di x, se n è preso sufficientemente grande.

117. Sia $f(x) = \log(1+x)$;

onde $f'(x) = \frac{1}{1+x}$ ed $f'(0) = 1$,

$$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} \text{ ed } f''(0) = -1,$$

....

$$f^n(x) = \frac{(-1)^{n-1}\lfloor n-1}{(1+x)^n} \text{ ed } f^n(0) = (-1)^{n-1}\lfloor n-1;$$

....

quindi, per l'Art. 95,

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}.$$

In questa serie, se supponiamo x positivo e non maggiore dell'unità, allora, siccome $\left(\frac{x}{1+\theta x}\right)^{n+1}$ non può essere maggiore dell'unità, l'errore che commettiamo, fermandoci al termine $\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$, non è maggiore di $\frac{1}{n+1}$; vale a dire, può essere reso tanto piccolo quanto ci piace crescendo n sufficientemente.

Se si cambia il segno di x, abbiamo

$$\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots - \frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1-\theta x)^{n+1}},$$

la quale non dà una forma molto conveniente al *resto*. Ma per l'Art. 110, possiamo ancora scrivere

$$\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots - \frac{x^n}{n} - \frac{(1-\theta)^n x^{n+1}}{(1-\theta x)^{n+1}},$$

in cui θ è tra 0 ed 1;

ora $$\frac{(1-\theta)^n x^{n+1}}{(1-\theta x)^{n+1}} = \left(\frac{x-\theta x}{1-\theta x}\right)^n \cdot \frac{x}{1-\theta x}.$$

Se x è minore dell'unità, accade lo stesso per $\frac{x-\theta x}{1-\theta x}$, ed $\left(\frac{x-\theta x}{1-\theta x}\right)^n$ si può rendere tanto piccolo quanto ci piace prendendo n sufficientemente grande.

Quindi, se n è preso sufficientemente grande, il *resto* si può rendere tanto piccolo quanto ci piace.

118. Negli esempii precedenti, abbiamo potuto scrivere il termine generale della serie, ed il *resto* dopo $n+1$ termini. Ma se $f(x)$ è una funzione complicata, l'espressione di $f^n(x)$ sarà generalmente troppo lunga per essere adoperata. Perciò non è raro di proporre quistioni come « sviluppare, col Teorema di Maclaurin, $e^x \log(1+x)$ sino al termine che contiene x^5. » Quì non si richiede il *termine generale*, o il *resto*, o di mostrare quando, per lo scopo della valutazione numerica, il resto può essere trascurato. Noi procediamo nel seguente modo.

$f(x) = e^x \log(1+x)$,

onde $f(0) = 0$.

Per l'Art. 80,

$$f'(x) = e^x \log(1+x) + \frac{e^x}{1+x},$$

onde $f'(0) = 1$;

$$f''(x) = e^x \log(1+x) + \frac{2e^x}{1+x} - \frac{e^x}{(1+x)^2},$$

onde $f''(0) = 1$;

$$f'''(x) = e^x \log(1+x) + \frac{3e^x}{1+x} - \frac{3e^x}{(1+x)^2} + \frac{2e^x}{(1+x)^3},$$

onde $f'''(0) = 2$;

$$f^{iv}(x) = e^x \log(1+x) + \frac{4e^x}{1+x} - \frac{6e^x}{(1+x)^2} + \frac{8e^x}{(1+x)^3} - \frac{6e^x}{(1+x)^4},$$

onde $f^{iv}(0) = 0$;

$$f^{v}(x) = e^x \log(1+x) + \frac{5e^x}{1+x} - \frac{10e^x}{(1+x)^2} + \frac{20e^x}{(1+x)^3} - \frac{30e^x}{(1+x)^4} + \frac{24}{(1+x)^5},$$

onde $f^{v}(0) = 9$.

Quindi $$e^x \log(1+x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{\lfloor 3} + \frac{9x^5}{\lfloor 5} + \text{etc.}$$

Questo risultato può verificarsi moltiplicando lo sviluppo di e^x per quello di $\log(1+x)$.

119. Metodi di sviluppo più o meno rigorosi sono spesso adoperati per casi speciali dei quali procediamo a dare esempii. Noi non poniamo importanza sopra di essi come investigazioni esatte, ma essi possono servire come esercizii nella differenziazione.

Sviluppare $\tan^{-1} x$ secondo le potenze di x.

Supponiamo $\tan^{-1} x = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_n x^n + \text{etc.} \ldots\ldots (1)$.

Differenziando i due lati rispetto ad x,

si ha $$\frac{1}{1+x^2} = A_1 + 2A_2 x + \ldots + nA_n x^{n-1} + \text{etc.} \ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Ma $$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \text{etc.} \ldots\ldots\ldots\ldots (3),$$

per mezzo della semplice divisione, o col teorema del binomio.

Eguagliando i coefficienti delle potenze simili di x in (2) e (3), abbiamo

$$A_1 = 1,$$
$$A_2 = 0,$$
$$A_3 = -\tfrac{1}{3},$$
$$A_4 = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

e ponendo $x=0$ in (1), otteniamo $A_0 = 0$; quindi

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \text{etc.}$$

Questo esempio può anche essere trattato facilmente col metodo rigoroso già usato negli Art. 114–117. Apparisce dall'Esempio 18, pag. 66, che l'n^{mo} coefficiente differenziale di $\tan^{-1} x$ è

$$\frac{(-1)^{n-1} \lfloor n-1}{(1+x^2)^{\frac{n}{2}}} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2} - n \tan^{-1} x\right).$$

Quindi abbiamo

$$\tan^{-1}x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + \frac{x^n}{n}(-1)^{n-1}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}$$
$$+ \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta^2x^2)^{\frac{n+1}{2}}}\operatorname{sen}\left\{\frac{(n+1)\pi}{2} - (n+1)\tan^{-1}\theta x\right\}.$$

E se x è numericamente minore di 1, l'ultimo termine può essere reso tanto piccolo quanto ci piace crescendo sufficientemente n; sicchè la serie infinita

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$$

prendendo un numero sufficiente di termini, può essere condotta tanto vicino quanto ci piace a $\tan^{-1}x$.

120. Sviluppare $\operatorname{sen}^{-1}x$ secondo le potenze di x.

Supponiamo $\operatorname{sen}^{-1}x = A_0 + A_1x + A_2x^2 + \ldots + A_nx^n + \text{etc.}$ (1).

Differenziando i due lati, si ha

$$\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}} = A_1 + 2A_2x + 3A_3x^2 + \ldots + nA_nx^{n-1} + \text{etc.} \quad (2).$$

Ma $\dfrac{1}{\sqrt{(1-x^2)}} = 1 + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1.3}{2.4}x^4 + \dfrac{1.3.5}{2.4.6}x^6 + \text{etc.} \ldots\ldots\ldots (3),$

pel teorema del binomio.

Quindi, paragonando i coefficienti in (2) e (3), si determinano A_1, A_2, etc., e ponendo $x=0$ in (1) si ha $A_0=1$. Sostituendo in (1), abbiamo

$$\operatorname{sen}^{-1}x = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^5}{5} + \text{etc.}$$

121. Sviluppare $e^{a\operatorname{sen}^{-1}x}$ secondo le potenze di x.

Si ponga $\qquad e^{a\operatorname{sen}^{-1}x} = y \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1),$

allora $\qquad \dfrac{dy}{dx} = e^{a\operatorname{sen}^{-1}x}\dfrac{a}{\sqrt{(1-x^2)}} \ldots\ldots\ldots\ldots (2),$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^{a\operatorname{sen}^{-1}x}\frac{a^2}{1-x^2} + \frac{xae^{a\operatorname{sen}^{-1}x}}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \ldots (3);$$

quindi $(1-x^2)\dfrac{d^2y}{dx^2} - x\dfrac{dy}{dx} = a^2y$ . . . . (4).

Supponiamo $y = A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \ldots + A_nx^n + \text{etc.}$ (5);

quindi $\dfrac{dy}{dx} = A_1 + 2A_2x + \ldots + nA_nx^{n-1} + \text{etc.},$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \quad 2A_2 + \ldots + n(n-1)A_nx^{n-2} + \text{etc.}$$

Si sostituiscano questi valori di y, $\dfrac{dy}{dx}$, e $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, in (4), indi si eguaglino i coefficienti delle potenze simili di x nei due lati, ed otterremo

$$A_{n+2} = \frac{a^2+n^2}{(n+1)(n+2)}A_n \ldots\ldots\ldots\ldots (6).$$

L'equazione (6) ci abilita a determinare A_2, A_3, A_4, etc., quando conosciamo A_0 ed A_1.

Ma A_0 è il valore di y o $e^{a\,\text{sen}^{-1}x}$, per $x=0$, ed

A_1 . . . . $\dfrac{dy}{dx}$ o $e^{a\,\text{sen}^{-1}x}\dfrac{a}{\sqrt{(1-x^2)}}$, per $x=0$;

onde
$$A_0 = 1,$$
$$A_1 = a.$$

Quindi, per (6),

$$A_2 = \frac{a^2}{1.2}A_0 = \frac{a^2}{1.2},$$

$$A_3 = \frac{a^2+1}{2.3}A_1 = \frac{(a^2+1)a}{\underline{|3}},$$

etc.;

adunque $e^{a\,\text{sen}^{-1}x} = 1 + ax + \dfrac{a^2x^2}{1.2} + \dfrac{a(a^2+1)}{1.2.3}x^3 + \dfrac{a^2(a^2+2^2)}{\underline{|4}}x^4$

$$+ \frac{a(a^2+1)(a^2+3^2)}{\underline{|5}}x^5 + \text{etc.}$$

Poichè $e^{a\,\text{sen}^{-1}x} = 1 + a\,\text{sen}^{-1}x + \dfrac{a^2}{1.2}(\text{sen}^{-1}x)^2 + \text{etc.},$

abbiamo, eguagliando i coefficienti di a in questa serie, e nel risultato testè ottenuto,

$$\text{sen}^{-1}x = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^5}{5} + \text{etc.}$$

come già si è trovato. Del pari eguagliando i coefficienti di a^2, abbiamo

$$(\text{sen}^{-1}x)^2 = x^2 + \frac{2^2}{3.4}x^4 + \frac{2^2.4^2}{3.4.5.6}x^6 + \frac{2^2.4^2.6^2}{3.4.5.6.7.8}x^8 + \text{etc.}$$

122. Si voglia lo sviluppo di sen ($m$sen^{-1}x) secondo le potenze di x.

Ponendo y per questa funzione, possiamo mostrare che

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} = x\,\frac{dy}{dx} - m^2y.$$

Procedendo come nell'Art. 121, troviamo

$$(n+1)(n+2)A_{n+2} = (n^2-m^2)A_n, \text{ e}$$

$$\text{sen}(m\,\text{sen}^{-1}x) = \frac{m}{1}x + \frac{m(1^2-m^2)}{\lfloor 3}x^3 + \frac{m(1^2-m^2)(3^2-m^2)}{\lfloor 5}x^5 + \text{etc.}$$

123. Similmente cos (m sen^{-1}x)

$$= 1 - \frac{m^2}{1.2}x^2 - \frac{m^2(2^2-m^2)}{\lfloor 4}x^4 - \frac{m^2(2^2-m^2)(4^2-m^2)}{\lfloor 6}x^6 - \text{etc.}$$

ESEMPII.

1. Se $e^{2x}(3-x)-4xe^x-x-3$ si sviluppi col Teorema di Maclaurin, il primo termine è $-\dfrac{4x^5}{\lfloor 5}$.

2. Sviluppare $\log(1+e^x)$ secondo le potenze di x.

   Ris. $\log 2 + \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{2^3} - \dfrac{x^4}{2^3\lfloor 4} + \text{etc.}$

3. Sviluppare $e^{x\,\text{sen}\,x}$ secondo le potenze di x.

   Ris. $1 + x^2 + \dfrac{x^4}{3} + \text{etc.}$

4. $e^x \sec x = 1 + x + x^2 + \dfrac{2x^3}{3} + \text{etc.}$

5. $\left(\frac{1+e^x}{2}\right)^n = 1 + \frac{nx}{2} + \frac{n(n+1)}{2.2}\frac{x^2}{2} + \dots$

6. $\sqrt{(1+4x+12x^2)} = 1 + 2x + 4x^2 + \text{etc.}$

7. $(e^x + e^{-x})^n = 2^n\left\{1 + \frac{n}{\lfloor\underline{2}}x^2 + \frac{3n^2-2n}{\lfloor\underline{4}}x^4 + \text{etc.}\right\}$

8. $(\cos x)^n = 1 - \frac{nx^2}{1.2} + \frac{n(3n-2)x^4}{\lfloor\underline{4}} - \frac{n\{15(n-1)^2+1\}x^6}{\lfloor\underline{6}}$

$+ \text{etc.}$

9. $-\log\cos x = \frac{x^2}{\lfloor\underline{2}} + \frac{2x^4}{\lfloor\underline{4}} + \frac{16x^6}{\lfloor\underline{6}} + \frac{16\times 17\,x^8}{\lfloor\underline{8}} + \dots$

10. $e^{\cos x} = e\left\{1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{4x^4}{\lfloor\underline{4}} - \frac{31x^6}{\lfloor\underline{6}}\ \text{etc.}\right\}$

11. $\text{sen}^{-1}(x+h) = \text{sen}^{-1}x + \frac{h}{\sqrt{(1-x^2)}} + \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{h^2}{\lfloor\underline{2}}$

$+ \frac{1+2x^2}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}\frac{h^3}{\lfloor\underline{3}} + \frac{3x(3+2x^2)}{(1-x^2)^{\frac{7}{2}}}\frac{h^4}{\lfloor\underline{4}} + \text{etc.}$

12. $\log(1-x+x^2) = -x + \frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\dots$

13. $\log\{x + \sqrt{(a^2+x^2)}\} = \log a + \frac{x}{a} - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3a^3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5a^5} - \dots$

14. $\log(1+\text{sen}\,x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\dots$

15. $e^{\tan^{-1}x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{7x^4}{24}\dots$

16. Per quali valori di x è in difetto il Teorema di Taylor, se $y = \sqrt[5]{\left\{\frac{(x-a)^7(x-b)^{10}}{(x-c)^2}\right\}}$, e quale è il primo coefficiente differenziale che diviene infinito?

CAPITOLO VIII.

DIFFERENZIAZIONE SUCCESSIVA. DIFFERENZIAZIONE DI UNA FUNZIONE DI DUE VARIABILI.

124. Nell'Art. 77, abbiamo definito il *secondo coefficiente differenziale* di una funzione essere il coefficiente differenziale del coefficiente differenziale di questa funzione. Il coefficiente differenziale del secondo coefficiente differenziale è stato chiamato il terzo coefficiente differenziale, e così di seguito. Considereremo ora sotto un altro aspetto questi successivi coefficienti differenziali.

125. Sia $$y = f(x),$$
$$y + \Delta y = f(x+h),$$
onde $$\Delta y = f(x+h) - f(x).$$
Nel secondo membro dell'ultima equazione si muti x in $x+h$ e si sottragga il valore primitivo; otteniamo così
$$f(x+2h) - f(x+h) - \{ f(x+h) - f(x) \},$$
o $$f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x).$$

Questo risultato, d'accordo con la nostra stabilita notazione, può essere dinotato con $\Delta(\Delta y)$, che si abbrevia in $\Delta^2 y$. Quindi
$$\Delta^2 y = f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x).$$
Similmente $\Delta(\Delta^2 y)$ o $\Delta^3 y$ sarà eguale a
$$f(x+3h) - 2f(x+2h) + f(x+h)$$
$$- \{ f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x) \},$$
cioè, $$\Delta^3 y = f(x+3h) - 3f(x+2h) + 3f(x+h) - f(x).$$

126. Seguendo il metodo dell'ultimo articolo, si troveranno le espressioni per $\Delta^4 y$, $\Delta^5 y$, etc. Pel nostro scopo non cercheremo l'espressione generale di $\Delta^n y$. Sarà facile, però, al lettore di mostrare, con una pruova per induzione, che

$$\Delta^n y = f(x+nh) - nf\{x+(n-1)h\} + \frac{n(n-1)}{1.2} f\{x+(n-2)h\} - \dots$$
$$\dots\dots \pm nf(x+h) \mp f(x).$$

127. *Mostrare che il limite* di $\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}$ è $\frac{d^2 y}{dx^2}$.

Abbiamo, per l'Art. 125,

$$\Delta^2 y = f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x).$$

Ma, per l'Art. 92,

$$f(x+2h) = f(x) + 2hf'(x) + \frac{(2h)^2}{1.2} f''(x) + \frac{(2h)^3}{\lfloor 3} f'''(x+2\theta h),$$

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x) + \frac{h^3}{\lfloor 3} f'''(x+\theta_1 h),$$

θ e θ_1 essendo frazioni proprie. Quindi

$$\Delta^2 y = h^2 f''(x) + \frac{h^3}{\lfloor 3}\{4f'''(x+2\theta h) - f'''(x+\theta_1 h)\}.$$

Si dividano ambo i lati per h^2, o sia per $(\Delta x)^2$, e quindi si faccia diminuire h indefinitamente. Si otterrà

$$\text{limite di } \frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} = f''(x);$$

cioè, il limite di $\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}$ è $\frac{d^2 y}{dx^2}$.

128. Il risultato dell'ultimo Articolo può essere generalizzato col metodo induttivo di dimostrazione. Supponiamo

$$\Delta^n y = h^n f^n(x) + h^{n+1}\psi(x) \dots\dots\dots\dots (1),$$

in cui $\psi(x)$ è una funzione di x ed h, che rimane finita quando h si pone $=0$. Da (1) abbiamo

$$\Delta^{n+1} y = h^n f^n(x+h) + h^{n+1}\psi(x+h) - \{h^n f^n(x) + h^{n+1}\psi(x)\}$$
$$= h^n\{f^n(x+h) - f^n(x)\} + h^{n+1}\{\psi(x+h) - \psi(x)\}.$$

Ora, per l'Art. 92,

$$f^n(x+h) = f^n(x) + hf^{n+1}(x) + \frac{h^2}{1.2} f^{n+2}(x+\theta h),$$

$$\psi(x+h) = \psi(x) + h\psi'(x+\theta_1 h),$$

quindi

$$\Delta^{n+1}y = h^{n+1} f^{n+1}(x) + h^{n+2} \{ \tfrac{1}{2} f^{n+2}(x+\theta h) + \psi'(x+\theta_1 h) \},$$

$$= h^{n+1} f^{n+1}(x) + h^{n+2} \psi_1(x) \ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

L'equazione (2) ci mostra che, ammessa la verità di (1), possiamo dedurre per $\Delta^{n+1}y$ un valore della stessa forma di quella supposta per $\Delta^n y$. Ma l'Art. 127 dà per $\Delta^2 y$ un'espressione della forma supposta; quindi $\Delta^3 y$ ha la stessa forma, e così anche $\Delta^4 y$, e generalmente $\Delta^n y$.

Dall'equazione (1), dividendo i due lati per h^n e poi diminuendo h indefinitamente, abbiamo

$$\text{limite di } \frac{\Delta^n y}{\Delta x^n} = f^n(x);$$

cioè, il limite di $\frac{\Delta^n y}{\Delta x^n}$ è $\frac{d^n y}{dx^n}$.

129. Sinora abbiamo considerato solamente funzioni di *una variabile indipendente;* vale a dire, abbiamo supposto nell'equazione $y = f(x)$, che sebbene quantità dinotate da simboli come a, b, etc. potessero trovarsi in $f(x)$, pure esse non fossero suscettibili di alcun cangiamento. Supponiamo ora che si abbia l'equazione

$$u = x^2 + xy + y^2,$$

e dinoti y una quantità costante ed x una variabile, si ha

$$\frac{du}{dx} = 2x + y.$$

Dalla stessa equazione, se x è una quantità costante ed y una variabile, si ottiene

$$\frac{du}{dy} = 2y + x.$$

Naturalmente non possiamo considerare nello stesso tempo x come costante e variabile; ma non vi sarà alcun assurdo se in una occasione e per uno scopo consideriamo x costante, ed in un'altra occasione e per un altro scopo la consideriamo variabile.

130. Se x ed y dinotano quantità tali che ciascuna di esse può variare senza alterare l'altra, esse si dicono *variabili indipendenti*, ed ogni quantità u, il valore della quale dipende dai valori di x ed y, si dice una « funzione delle variabili indipendenti x ed y; »

$\frac{du}{dx}$, $\frac{d^2u}{dx^2}$, $\frac{d^3u}{dx^3}$, etc., dinotano i successivi coefficienti differenziali di u, presi nella supposizione che la x *solamente* varii;

$\frac{du}{dy}$, $\frac{d^2u}{dy^2}$, $\frac{d^3u}{dy^3}$..., dinotano i coefficienti differenziali successivi di u, presi nella supposizione che la y *solamente* varii.

131. Se u è una funzione delle variabili indipendenti x ed y, allora $\frac{du}{dx}$ sarà anche generalmente una funzione di x ed y. Quindi possiamo avere occasione di considerare i suoi coefficienti differenziali rispetto ad x o ad y. Il primo è dinotato da

$$\frac{d^2u}{dx^2},$$

come già si è stabilito; l'altro è dinotato da

$$\frac{d\frac{du}{dx}}{dy},$$

il quale si abbrevia in $\frac{d^2u}{dy\,dx}$.

Similmente, tanto $\frac{d^2u}{dx^2}$ che $\frac{d^2u}{dy\,dx}$ saranno generalmente funzioni di x ed y. Queste possono essere differenziate rispetto ad x e ad y. Quindi usiamo simboli come

$$\frac{d^3u}{dy\,dx^2}, \quad \frac{d^3u}{dx\,dy\,dx}, \quad \text{e} \quad \frac{d^3u}{dy^2\,dx};$$

il significato dei quali può essere raccolto dalle osservazioni precedenti. Per esempio, $\frac{d^3u}{dx\,dy\,dx}$ indica che debbono eseguirsi tre operazioni: dobbiamo differenziare u rispetto ad x,

supponendo y costante; la funzione che risulta deve essere differenziata rispetto ad y, supponendo x costante: quest' ultimo risultato deve essere differenziato rispetto ad x, supponendo y costante.

132. Considerando l'equazione $y = f(x)$, in cui abbiamo *una* variabile indipendente, lo studente poteva rapportarsi alla geometria analitica per avere illustrazioni della natura di una variabile dipendente e di un coefficiente differenziale. Si veggano gli Art. 35–43. In simil modo, se egli ha conoscenza degli elementi della geometria a tre dimensioni, troverà sussidio pel presente capitolo del Calcolo Differenziale. Per esempio, l'equazione

$$z = ax + by + c,$$

rappresenta un piano; x ed y sono *due variabili indipendenti*, di cui z è una funzione. Quì

$$\frac{dz}{dx} = a, \qquad \frac{dz}{dy} = b,$$

e tutt'i coefficienti differenziali di ordino superiore, $\frac{d^2z}{dx^2}$, etc., svaniscono.

Ancora, $$z = \sqrt{(r^2 - x^2 - y^2)} \ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

è l'equazione di una sfera. Se passiamo da un punto sulla sfera, di cui le coordinate sono x ed y, ad un altro di cui le coordinate sono $x + \Delta x$ ed y, noi variamo x *senza variare* y. Se in questo caso il valore della terza coordinata è $z + \Delta z$, abbiamo

$$z + \Delta z = \sqrt{\{r^2 - y^2 - (x + \Delta x)^2\}} \ldots\ldots (2).$$

Da (1) e (2) possiamo trovare $\frac{\Delta z}{\Delta x}$; ed il suo limite che dinotiamo con $\frac{dz}{dx}$, sarà $\frac{-x}{\sqrt{(r^2 - x^2 - y^2)}}$.

Il procedimento è lo stesso come se si avesse

$$z = \sqrt{(a^2 - x^2)},$$

in cui a è una costante; dalla quale si deduce

$$\frac{dz}{dx} = \frac{-x}{\sqrt{(a^2 - x^2)}},$$

e finalmente si pone $r^2 - y^2$ per a^2.

Da un'altra parte, se passiamo dal punto (x, y) ad un punto che ha x ed $y + \Delta y$ per sue coordinate, abbiamo, come sopra,

$$z + \Delta z = \sqrt{\{ r^2 - x^2 - (y + \Delta y)^2 \}} \ldots\ldots\ldots (3).$$

Ora, in (2) e (3) abbiamo usato Δz; ma non intendiamo che *il valore attribuito al simbolo sia lo stesso nei due casi.* Se vi fosse pericolo di errore col confonderli, si potrebbe usare $\Delta' z$ in (3), o qualche cosa di simile. Ma nel fatto noi usiamo solamente (3) per aiuto nel formarci un concetto di $\frac{dz}{dy}$; e siccome consideriamo $\frac{dz}{dx}$ e $\frac{dz}{dy}$ quali *simboli interi* non suscettibili di decomposizione, non può mai sorgere la quistione. « È il dz in $\frac{dz}{dx}$ lo stesso che il dz in $\frac{dz}{dy}$? »

133. Quando u è una funzione di due variabili indipendenti, i coefficienti differenziali $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$, $\frac{d^2u}{dx^2}$, $\frac{d^2u}{dx\,dy}$, etc., sono spesso chiamati « coefficienti differenziali *parziali* ». Ciascuno di questi coefficienti differenziali si ottiene per mezzo di una o più operazioni, ciascuna operazione essendo condotta nella supposizione che solamente *una* delle possibili variabili x ed y sia *attualmente* variabile.

Supponiamo per esempio $u = \tan^{-1}\frac{x}{y}$; allora

$$\frac{du}{dx} = \frac{y}{x^2 + y^2} \qquad \frac{du}{dy} = -\frac{x}{x^2 + y^2},$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \qquad \frac{d^2u}{dy^2} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2},$$

e così di seguito.

Differenziando $\frac{du}{dx}$ rispetto ad y otteniamo

$$\frac{d\,\frac{du}{dx}}{dy} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2};$$

e differenziando $\frac{du}{dy}$ rispetto ad x abbiamo

$$\frac{d\frac{du}{dy}}{dx}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Così vediamo che in questo esempio

$$\frac{d\frac{du}{dx}}{dy}=\frac{d\frac{du}{dy}}{dx}\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots(1),$$

o, come può scriversi,

$$\frac{d^2u}{dy\,dx}=\frac{d^2u}{dx\,dy}\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots(2).$$

Dimostreremo nel prossimo articolo che questo risultato è vero in generale. Dei due modi di scrivere il risultato dato in (1) e (2) il secondo è il più comodo, ma esso ha lo svantaggio di far *sembrare* ovvio allo studente il teorema che dobbiamo dimostrare, poichè gli suggerisce di dover semplicemente paragonare due *frazioni*. Ma come abbiamo già osservato, un simbolo di coefficiente differenziale è definito come un tutto, e non deve essere decomposto in un numeratore ed un denominatore. Si veggano gli Art. 26 e 77.

134. *Se* u *è una funzione qualunque delle variabili indipendenti* x *ed* y,

$$\frac{d\frac{du}{dx}}{dy}=\frac{d\frac{du}{dy}}{dx}.$$

Sia $u=\varphi(x,y)$; si muti x in $x+h$, allora per l'Art. 92,

$$\varphi(x+h,y)=\varphi(x,y)+h\frac{du}{dx}+\frac{h^2}{2}\varphi''(x+\theta h,y);$$

possiamo perciò scrivere

$$\varphi(x+h,y)-\varphi(x,y)=h\frac{du}{dx}+h^2v\dots\dots\dots(1).$$

in cui v è una certa funzione di x ed y, che rimane finita per $h=0$. In (1) si ponga $y+k$ invece di y; allora il primo

membro diviene $\varphi(x+h, y+k) - \varphi(x, y+k)$; per l'Art. 92 $\frac{du}{dx}$ diviene $\frac{du}{dx} + k \frac{d\frac{du}{dx}}{dy} + k^2\beta$, in cui β rimane finita per $k=0$; e v diviene $v + k\alpha$, in cui α è una quantità che rimane finita per $k = 0$, poichè essa tende a $\frac{dv}{dy}$ come suo limite. Così

$$\varphi(x+h, y+k) - \varphi(x, y+k) = h\frac{du}{dx} + hk\frac{d\frac{du}{dx}}{dy} + hk^2\beta$$
$$+ h^2v + h^2k\alpha \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Si sottragga (1) da (2); si avrà

$$\varphi(x+h, y+k) - \varphi(x+h, y) - \varphi(x, y+k) + \varphi(x, y)$$
$$= hk\frac{d\frac{du}{dx}}{dy} + h^2k\alpha + hk^2\beta.$$

Si divida per hk, ed indi si suppongano h e k diminuire indefinitamente; così

$$\frac{d\frac{du}{dx}}{dy} = \text{al limite quando } h \text{ e } k \text{ svaniscono di}$$
$$\frac{\varphi(x+h, y+k) - \varphi(x+h, y) - \varphi(x, y+k) + \varphi(x, y)}{hk}.$$

In un modo simile cambiando *prima* y in $y+k$, e *dopo* x in $x+h$, possiamo dimostrare che $\frac{d\frac{du}{dy}}{dx}$ è anche eguale al limite precedente.

Quindi
$$\frac{d\frac{du}{dx}}{dy} = \frac{d\frac{du}{dy}}{dx}.$$

135. L'oggetto dell'Articolo precedente si è di provare che $\frac{d^2u}{dy\,dx} = \frac{d^2u}{dx\,dy}$; ciò si è fatto mostrando che ciascuna di queste quantità è eguale al limite di una certa espressione. Quale

sia questa espressione è relativamente cosa di poca importanza, ma è interessante notare l'analogia del risultato con quelli negli Art. 127 e 128.

Dimostrazioni della proposizione dell'articolo precedente alle volte sono state date che sembrano più semplici di quella qui adottata, ma che mancano di rigore. In particolare talvolta si *suppone* una cosa che merita di essere notata. Per ottenere $\frac{d\frac{du}{dx}}{dy}$, secondo la definizione del simbolo, si fanno le seguenti operazioni. (1) Nella funzione u poniamo $x+h$ per x, si sottrae il valore primitivo dal nuovo valore, e poi si divide per h. (2) Troviamo il limite del risultato per $h=0$. (3) Poniamo allora $y+k$ per y, si sottrae il valore primitivo dal nuovo valore, e poi si divide per k. (4) Troviamo il limite del risultato per $k=0$. Ora spesso si *suppone* che possiamo fare la *terza* delle precedenti operazioni *prima* della seconda invece di *dopo* di essa. *Ammettendo* ciò il risultato richiesto si ottiene prontamente; infatti dalla prima operazione si ha $\frac{\varphi(x+h,y)-\varphi(x,y)}{h}$, quindi dalla terza si ottiene

$$\frac{\varphi(x+h,y+k)-\varphi(x+h,y)-\varphi(x,y+k)+\varphi(x,y)}{hk},$$

e secondo ciò che si è *supposto*, il limite di questa espressione è $\frac{d\frac{du}{dx}}{dy}$. In modo analogo si trova che $\frac{d\frac{du}{dy}}{dx}$ è anche eguale allo stesso limite.

Un'altra osservazione deve farsi per non incorrere in un possibile errore. Nella dimostrazione dell'Art. 134 abbiamo usato v per $\frac{1}{2}\varphi''(x+\theta h,y)$; in questa espressione tutto ciò che si conosce di θ si è che sia una frazione propria, e non si deve supporre che sia funzione di x *solamente*. Quindi quando si muta y in $y+k$ il valore di θ muterà generalmente. Ciò non altera la dimostrazione precedente, poichè non era necessario in essa di trovare attualmente il valore di $\frac{dv}{dy}$; ma il *supporre* che θ non muti al mutare di y ha reso inesatte alcune dimostrazioni che sono state date della proposizione nell'Art. 134.

136. L'importante principio dimostrato nell'Art. 134 si enuncia così « L'ordine delle differenziazioni indipendenti è indifferente; » o pure vi si allude come al principio della « convertibilità delle differenziazioni indipendenti ». Esso può essere esteso ad un numero qualunque di differenziazioni sicchè *se una funzione di due variabili indipendenti*, x *ed* y, *si deve differenziare* m *volte rispetto ad* x, *ed* n *volte rispetto ad* y, *il risultato sarà lo stesso in qualunque ordine si eseguano le differenziazioni.* Nella dimostrazione di questa proprietà dobbiamo applicare solamente il teorema dell'Art. 134 ripetutamente nel modo mostrato nell'esempio seguente.

Dimostrare che $\frac{d^3u}{dy^2\,dx} = \frac{d^3u}{dx\,dy^2}$;

$$\frac{d^3u}{dy^2\,dx} = \frac{d\,\frac{d^2u}{dy\,dx}}{dy}, \text{ per definizione,}$$

$$= \frac{d\,\frac{d^2u}{dx\,dy}}{dy}, \text{ per l'Art. 134,}$$

$$= \frac{d^3u}{dy\,dx\,dy}, \text{ per definizione,}$$

$$= \frac{d^2v}{dy\,dx}, \text{ se } v = \frac{du}{dy},$$

$$= \frac{d^2v}{dx\,dy}, \text{ per l'Art. 134,}$$

$$= \frac{d^3u}{dx\,dy^2}.$$

137. Se u è una funzione delle tre variabili indipendenti, x, y, z, abbiamo in simil modo

$$\frac{d^2u}{dy\,dz} = \frac{d^2u}{dz\,dy},$$

$$\frac{d^2u}{dx\,dz} = \frac{d^2u}{dz\,dx},$$

$$\frac{d^2u}{dx\,dy}=\frac{d^2u}{dy\,dx},$$

$$\frac{d^3u}{dx\,dy\,dz}=\frac{d^3u}{dx\,dz\,dy}=\frac{d^3u}{dz\,dx\,dy},$$

e così di seguito.

ESEMPII.

1. Se $u=\frac{x^2y}{a^2-z^2}$, trovare $\frac{d^2u}{dx\,dy}$ e $\frac{d^2u}{dy\,dz}$.

2. Verificare nei seguenti casi l'equazione

$$\frac{d^2u}{dx\,dy}=\frac{d^2u}{dy\,dx}:$$

$$u=x\operatorname{sen}y+y\operatorname{sen}x,$$

$$u=x\log y,$$

$$u=x^y,$$

$$u=\log\tan\frac{y}{x},$$

$$u=\frac{ay-bx}{by-ax},$$

$$u=y\log(1+xy).$$

3. Se $u=Ax^\alpha y^{\alpha'}+Bx^\beta y^{\beta'}+Cx^\gamma y^{\gamma'}+\text{etc.}$,

in cui $\alpha+\alpha'=\beta+\beta'=\gamma+\gamma'\ \text{etc.}=n$,

mostrare che $x\frac{du}{dx}+y\frac{du}{dy}=nu.$

In questo esempio u si dice una *funzione omogenea di n dimensioni.*

4. Se u è una funzione omogenea di n dimensioni, mostrare che

$$x\frac{d^2u}{dx^2}+y\frac{d^2u}{dx\,dy}=(n-1)\frac{du}{dx},\quad x\frac{d^2u}{dx\,dy}+y\frac{d^2u}{dy^2}=(n-1)\frac{du}{dy}.$$

5. Se u è una funzione omogenea di n dimensioni, mostrare che

$$x^2\frac{d^2u}{dx^2}+2xy\frac{d^2u}{dx\,dy}+y^2\frac{d^2u}{dy^2}=n(n-1)u.$$

6. Verificare i teoremi negli Esempii 3 e 4 nei seguenti casi:

$$u=(x+y)^2,$$

$$u=\frac{xy}{x+y},$$

$$u=\sqrt[3]{(x^2+y^2)}.$$

7. Se $u=x^3z^4+e^xy^2z^3+x^2y^2z^2$, mostrare che

$$\frac{d^4u}{dx^2\,dy\,dz}=6e^xyz^2+8yz.$$

8. Se $u=e^{xyz}$, mostrare che

$$\frac{d^3u}{dx\,dy\,dz}=(1+3xyz+x^2y^2z^2)\,e^{xyz}.$$

9. Se $u=y\sqrt{(a^2-x^2)}+x\sqrt{(a^2-y^2)}$, mostrare che

$$\frac{du}{dx}\frac{du}{dy}+\sqrt{(a^2-x^2)}\sqrt{(a^2-y^2)}\left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)^2=\frac{a^4}{\sqrt{(a^2-x^2)}\sqrt{(a^2-y^2)}}.$$

10. Se $u=\tan^{-1}\frac{xy}{\sqrt{(1+x^2+y^2)}}$, mostrare che

$$\frac{d^2u}{dx\,dy}=\frac{1}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}},\quad \frac{d^4u}{dx^2\,dy^2}=\frac{15xy}{(1+x^2+y^2)^{\frac{7}{2}}}.$$

11. Se $u=x\sqrt{(a^2-y^2)}\sqrt{(a^2-z^2)}+y\sqrt{(a^2-z^2)}\sqrt{(a^2-x^2)}$
$+z\sqrt{(a^2-x^2)}\sqrt{(a^2-y^2)}-xyz,$

mostrare che

$$-\sqrt{(a^2-x^2)}\sqrt{(a^2-y^2)}\sqrt{(a^2-z^2)}\frac{d^3u}{dx\,dy\,dz}=\sqrt{(a^2-x^2)}\frac{du}{dx}$$

$$=\sqrt{(a^2-y^2)}\frac{du}{dy}=\sqrt{(a^2-z^2)}\frac{du}{dz}.$$

12. Se $u = \log(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$, mostrare che

$$\frac{1}{6}\frac{d^3u}{dx\,dy\,dz} - \frac{1}{3}\frac{du}{dx}\frac{du}{dy}\frac{du}{dz} = e^{-u},$$

$$\frac{du}{dx} + \frac{du}{dy} + \frac{du}{dz} = \frac{3}{x+y+z},$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + 2\frac{d^2u}{dx\,dy} + 2\frac{d^2u}{dy\,dz} + 2\frac{d^2u}{dz\,dx}$$

$$= -\frac{9}{(x+y+z)^2},$$

$$\frac{d^6u}{dx^2\,dy^2\,dz^2} + \frac{d^6u}{dx^3\,dy^2\,dz} + \frac{d^6u}{dx^2\,dy^3\,dz} = -\frac{360}{(x+y+z)^6},$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} = -\frac{3}{(x+y+z)^2},$$

$$\frac{d^5u}{dx^3\,dy\,dz} + \frac{d^5u}{dx\,dy^3\,dz} + \frac{d^5u}{dx\,dy\,dz^3} = \frac{72}{(x+y+z)^5}.$$

CAPITOLO IX.

TEOREMA DI LAGRANGE E TEOREMA DI LAPLACE.

138. Si supponga $y = z + x\varphi(y)$ .... (1), in cui z ed x sono indipendenti, e si cerchi di sviluppare $f(y)$ secondo le potenze ascendenti di x. Si ponga u per $f(y)$, allora, pel teorema di Maclaurin, abbiamo

$$u = u_0 + x\frac{du_0}{dx} + \frac{x^2}{1.2}\frac{d^2u_0}{dx^2} + \frac{x^3}{\lfloor 3}\frac{d^3u_0}{dx^3} + \text{etc.},$$

in cui $u_0, \frac{du_0}{dx}, \frac{d^2u_0}{dx^2}$, etc. dinotano i valori di $u, \frac{du}{dx}, \frac{d^2u}{dx^2}$, etc. quando x si pone $= 0$ dopo la differenziazione. Procediamo a trasformare questi coefficienti differenziali di u rispetto ad x in una forma più conveniente per determinare i loro valori quando $x = 0$. Mostreremo dapprima che

$$\frac{d}{dx}\left\{F(v)\frac{dv}{dz}\right\} = \frac{d}{dz}\left\{F(v)\frac{dv}{dx}\right\} \text{........} (2),$$

supponendo v una funzione delle quantità indipendenti x è z, ed $F(v)$ una funzione qualunque di v.

Per stabilire (2) basta osservare solamente che il primo membro è

$$F'(v)\frac{dv}{dx}\frac{dv}{dz} + F(v)\frac{d^2v}{dx\,dz},$$

ed il secondo è

$$F'(v)\frac{dv}{dx}\frac{dv}{dz} + F(v)\frac{d^2v}{dz\,dx};$$

e queste due espressioni sono eguali per l'Art. 134.

Da (1) abbiamo

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(y) + x\varphi'(y)\frac{dy}{dx},$$

onde $$\frac{dy}{dx} = \frac{\varphi(y)}{1 - x\varphi'(y)}.$$

Inoltre $$\frac{dy}{dz} = 1 + x\varphi'(y)\frac{dy}{dz},$$

onde $$\frac{dy}{dz} = \frac{1}{1 - x\varphi'(y)}.$$

Quindi $$\frac{dy}{dx} = \varphi(y)\frac{dy}{dz}.$$

Di più $$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dy}\frac{dy}{dx} \text{ e } \frac{du}{dz} = \frac{du}{dy}\frac{dy}{dz},$$

onde $$\frac{du}{dx} = \varphi(y)\frac{du}{dz} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Quindi $$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left\{\varphi(y)\frac{du}{dz}\right\},$$

$$= \frac{d}{dx}\left\{\varphi(y)f'(y)\frac{dy}{dz}\right\}, \text{ poichè } u = f(y),$$

$$= \frac{d}{dz}\left\{\varphi(y)f'(y)\frac{dy}{dx}\right\} \text{ per (2)},$$

$$= \frac{d}{dz}\left\{\varphi(y)\frac{du}{dx}\right\},$$

$$= \frac{d}{dz}\left\{\left[\varphi(y)\right]^2\frac{du}{dz}\right\} \text{ per (3)}.$$

Ancora $$\frac{d^3u}{dx^3} = \frac{d^2}{dx\,dz}\left\{\left[\varphi(y)\right]^2\frac{du}{dz}\right\},$$

$$= \frac{d^2}{dz\,dx}\left\{\left[\varphi(y)\right]^2\frac{du}{dz}\right\} \text{ per l'Art. 134.}$$

$$= \frac{d^2}{dz^2}\left\{\left[\varphi(y)\right]^2\frac{du}{dx}\right\} \text{ per (2)},$$

$$= \frac{d^2}{dz^2}\left\{\left[\varphi(y)\right]^3\frac{du}{dz}\right\} \text{ per (3)}.$$

Supponiamo, secondo questa legge, che

$$\frac{d^n u}{dx^n} = \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left\{ \overline{\varphi(y)}^{\,n} \frac{du}{dz} \right\};$$

allora

$$\frac{d^{n+1} u}{dx^{n+1}} = \frac{d^n}{dx\, dz^{n-1}} \left\{ \overline{\varphi(y)}^{\,n} \frac{du}{dz} \right\},$$

$$= \frac{d^n}{dz^{n-1}\, dx} \left\{ \overline{\varphi(y)}^{\,n} \frac{du}{dz} \right\}, \text{ per l'Art. 134},$$

$$= \frac{d^n}{dz^n} \left\{ \overline{\varphi(y)}^{\,n} \frac{du}{dx} \right\} \text{ per (2)},$$

$$= \frac{d^n}{dz^n} \left\{ \overline{\varphi(y)}^{\,n+1} \frac{du}{dz} \right\},$$

il che mostra che l'espressione di $\frac{d^n u}{dx^n}$ segue la stessa legge che quella di $\frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}}$. Quindi, siccome questa legge è stata dimostrata valere per $\frac{d^2 u}{dx^2}$ e $\frac{d^3 u}{dx^3}$, essa vale in generale. In $\frac{d^n u_0}{dx^n}$ dobbiamo porre $x = 0$ *dopo* che la differenziazione è stata eseguita; ma quando trasformiamo $\frac{d^n u}{dx^n}$, con la formola precedente, in una espressione che racchiude solamente coefficienti differenziali *presi rispetto a* z, possiamo porre $x = 0$ *prima* della differenziazione, poichè x deve essere considerata come una costante nel differenziare rispetto a z. Quando $x = 0$,

$$y = z,$$

$$\varphi(y) = \varphi(z),$$

onde

$$\frac{du_0}{dz} = \frac{df(z)}{dz} = f'(z),$$

$$\frac{du_0}{dx} = \varphi(z) f'(z),$$

$$\frac{d^2 u_0}{dx^2} = \frac{d}{dz} \left\{ \overline{\varphi(z)}^{\,2} f'(z) \right\},$$

. . . .

e così

$$f(y) = f(z) + x\varphi(z)f'(z) + \frac{x^2}{1.2}\frac{d}{dz}\left\{\overline{\varphi(z)}|^2 f'(z)\right\}$$

$$+ \frac{x^3}{\underline{|3}}\frac{d^2}{dz^2}\left\{\overline{\varphi(z)}|^3 f'(z)\right\}$$

$$\ldots\ldots + \frac{x^n}{\underline{|n}}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left\{\overline{\varphi(z)}|^n f'(z)\right\} + \text{etc.}$$

Questo risultato si chiama il Teorema di Lagrange.

139. Supposto $y = F\{z + x\varphi(y)\}$;

si cerca lo sviluppo di $f(y)$ secondo le potenze di x.

Si ponga t per $z + x\varphi(y)$; allora

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dF}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dF}{dt}\left\{\varphi(y) + x\varphi'(y)\frac{dy}{dx}\right\},$$

onde

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\varphi(y)\dfrac{dF}{dt}}{1 - x\varphi'(y)\dfrac{dF}{dt}};$$

del pari

$$\frac{dy}{dz} = \frac{dF}{dt}\frac{dt}{dz} = \frac{dF}{dt}\left\{1 + x\varphi'(y)\frac{dy}{dz}\right\},$$

onde

$$\frac{dy}{dz} = \frac{\dfrac{dF}{dt}}{1 - x\varphi'(y)\dfrac{dF}{dt}}.$$

Quindi

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(y)\frac{dy}{dz}.$$

Da ciò, nello stesso modo che nell'Art. 138, deduciamo che

$$\frac{d^n u}{dx^n} = \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left\{\overline{\varphi(y)}|^n \frac{du}{dz}\right\},$$

in cui

$$u = f(y).$$

Se poniamo $x = 0$ nell'equazione

$$y = F\{z + x\varphi(y)\},$$

si deduce
$$y = F(z),$$
$$\varphi(y) = \varphi\{F(z)\},$$
$$\frac{du}{dz} = \frac{df\{F(z)\}}{dz},$$

e finalmente,

$$f(y) = f\{F(z)\} + x\varphi\{F(z)\}\frac{df\{F(z)\}}{dz} + \frac{x^2}{1.2}\frac{d}{dz}\left[\overline{\varphi\{F(z)\}}|^2 \frac{df\{F(z)\}}{dz}\right]$$
$$\ldots\ldots + \frac{x^n}{\underline{|n}}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[\overline{\varphi\{F(z)\}}|^n \frac{df\{F(z)\}}{dz}\right] + \text{etc.}$$

Questo si chiama il Teorema di Laplace.

140. Il Teorema di Lagrange si può dedurre immediatamente da quello di Laplace, ponendo $F(z) = z$. Ma il Teorema di Laplace può anche dedursi da quello di Lagrange, come segue:

Nell'equazione $\qquad y = F\{z + x\varphi(y)\}$..............(1),

si ponga $\qquad z + x\varphi(y) = y'$,

onde $\qquad y = F(y')$,

con ciò $\qquad y' = z + x\varphi\{F(y')\}$..............(2),

ed $\qquad f(y)$ diviene $f\{F(y')\}$.

Adunque si tratta di sviluppare $f\{F(y')\}$ secondo le potenze di x, per mezzo dell'equazione (2). Ma ciò è precisamente quello che si ottiene col Teorema di Lagrange, le funzioni complesse $f\{F(y')\}$ e $\varphi\{F(y')\}$ prendendo il posto delle funzioni semplici $f(y')$ e $\varphi(y')$.

141. Deve essere ricordato, che nel richiamare il Teorema di Maclaurin, il quale serve di fondamento a quelli di Lagrange e di Laplace, a rigore avremmo dovuto adoperarlo nella forma data nell'Art. 95, con una espressione del resto dopo $n + 1$ termini. Però questa espressione del resto diviene così complicata in questo caso, che non ci siamo riferiti ad essa. Le investigazioni dei Teoremi di Lagrange e di Laplace si deve confessare essere imperfette, poichè i caratteri della convergenza di queste serie, la quale solamente può giustificare il loro uso come equivalenti aritmetici delle funzioni che esse intendono rappresentare sono di un carattere troppo difficile per un libro elementare. Lo studente provetto

può consultare Moigno *Leçons de Calcul Différentiel*, 18ª Lezione. Liouville *Journal de Mathématiques*, tom. XI. p. 129 e 313.

142. Se $x = a + y\varphi(x)$, abbiamo pel Teorema di Lagrange

$$f(x) = f(a) + y\,\{\varphi(x) f'(x)\} + \frac{y^2}{1.2}\frac{d}{dx}\left\{\overline{\varphi(x)}|^2 f'(x)\right\}$$
$$+ \frac{y^3}{\underline{|3}}\frac{d^2}{dx^2}\left\{\overline{\varphi(x)}|^3 f'(x)\right\} + \text{etc.},$$

in cui nei coefficienti delle diverse potenze di y, dobbiamo fare $x = a$ dopo che le differenziazioni sono state eseguite. Sia y o $\frac{x-a}{\varphi(x)} = \psi(x)$, sicchè $x = a$ è una radice di $\psi(x) = 0$; allora

$$f(x) = f(a) + \psi(x)\left[\frac{f'(x)(x-a)}{\psi(x)}\right] + \frac{\{\psi(x)\}^2}{1.2}\frac{d}{dx}\left[\frac{f'(x)(x-a)^2}{\{\psi(x)\}^2}\right]$$
$$+ \text{etc.}$$

in cui, nei coefficienti delle diverse potenze di $\psi(x)$, x deve essere posto $= a$ dopo le differenziazioni. Questa serie per $f(x)$ secondo le potenze di $\psi(x)$ si chiama il Teorema di Burmann.

143. Dinoti $\psi^{-1}(x)$ la funzione inversa di $\psi(x)$, sicchè se $u = \psi(x)$ si ha $\psi^{-1}(u) = x$, e quindi $\psi\{\psi^{-1}(u)\} = u$. Se scriviamo nel Teorema di Burmann $\psi^{-1}(x)$ invece di x, abbiamo

$$f\{\psi^{-1}(x)\} = f(a) + x\left[\frac{f'(x)(x-a)}{\psi(x)}\right] + \frac{x^2}{1.2}\frac{d}{dx}\left[\frac{f'(x)(x-a)^2}{\{\psi(x)\}^2}\right]$$
$$+ \frac{x^3}{\underline{|3}}\frac{d^2}{dx^2}\left[\frac{f'(x)(x-a)^3}{\{\psi(x)\}^3}\right] + \text{etc.}$$

Non si è fatto alcun cangiamento nelle quantità chiuse in parentesi, poichè esse non contengono x quando le operazioni indicate sono completamente effettuate.

Se $f(u) = u$, abbiamo

$$\psi^{-1}(x) = a + x\left[\frac{x-a}{\psi(x)}\right] + \frac{x^2}{1.2}\frac{d}{dx}\left[\frac{(x-a)^2}{\{\psi(x)\}^2}\right]$$
$$+ \frac{x^3}{\underline{|3}}\frac{d^2}{dx^2}\left[\frac{(x-a)^3}{\{\psi(x)\}^3}\right] + \text{etc.}$$

e se $a=0$, così che $\psi(x)$ svanisca con x,

$$\psi^{-1}(x)=x\left[\frac{x}{\psi(x)}\right]+\frac{x^2}{1.2}\frac{d}{dx}\left[\frac{x^2}{\{\psi(x)\}^2}\right]$$
$$+\frac{x^3}{\lfloor 3}\frac{d^2}{dx^2}\left[\frac{x^3}{\{\psi(x)\}^3}\right]+\text{etc.}$$

ESEMPII.

1. Dato $y=z+xe^y$, sviluppare y secondo le potenze di x.

Quì
$$\varphi(y)=e^y,$$
$$f(y)=y;$$
onde
$$\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left\{\overline{\varphi(z)}|^n f'(z)\right\}=\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}e^{nz}=n^{n-1}e^{nz}.$$

Quindi $y=z+xe^z+\frac{x^2}{1.2}2e^{2z}+\frac{x^3}{\lfloor 3}3^2e^{3z}+\ldots+\frac{x^n}{\lfloor n}n^{n-1}e^{nz}+\text{etc.}$

2. Dato $y=z+x\frac{y^2-1}{2}$, sviluppare y secondo le potenze di x.

Quì
$$\varphi(y)=\frac{y^2-1}{2},$$
$$f(y)=y;$$
onde
$$\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left\{\overline{\varphi(z)}|^n f'(z)\right\}=\frac{1}{2^n}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}(z^2-1)^n.$$

Quindi $y=z+x\frac{1}{2}(z^2-1)+\frac{x^2}{\lfloor 2}\cdot\frac{1}{2^2}\frac{d}{dz}(z^2-1)^2+\ldots$
$$+\frac{x^n}{\lfloor n}\cdot\frac{1}{2^n}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}(z^2-1)^n+\text{etc.}$$

3. Dato $xy-\log y=0$, sviluppare y secondo le potenze di x.

Dall'equazione data
$$y=e^{xy};$$
onde $$yx=xe^{xy},$$
o sia $$y'=xe^{y'}.$$

Se dunque poniamo $z=0$ nel risultato del primo Esempio, si deduce
$$y'=x+x^2+\frac{x^3}{\lfloor 2}3+\ldots+\frac{x^n}{\lfloor n-1}n^{n-2}+\text{etc.},$$

si riponga yx per y' e si divida per x; allora

$$y = 1 + x + \frac{x^2}{\lfloor 2} 3 + \ldots + \frac{x^{n-1}}{\lfloor n-1} n^{n-2} + \text{etc.}$$

4. Se $y = \frac{x}{1 + \sqrt{(1-x^2)}}$, sviluppare y^n secondo le potenze ascendenti di x.

Poichè $$y = \frac{x}{1 + \sqrt{(1-x^2)}},$$

abbiamo $$y\sqrt{(1-x^2)} = x - y;$$

onde $$y^2(1-x^2) = x^2 - 2xy + y^2,$$

ed $$y = \frac{x}{2} + \frac{y^2}{2}x.$$

Possiamo dunque porre

$$y = z + \frac{y^2}{2}x,$$

sicchè $$\varphi(y) = \frac{y^2}{2},$$

$$f(y) = y^n.$$

Con ciò $$y^n = z^n + x.\frac{n.z^{n+1}}{2} + \ldots + \frac{x^r}{\lfloor r} \frac{n}{2^r} \frac{d^{r-1}}{dz^{r-1}}(z^{2r+n-1}) + \text{etc.},$$

e *dopo* che le differenziazioni sono eseguite, dobbiamo porre $\frac{x}{2}$ per z.

5. Se $x = ye^y$, sviluppare $\text{sen}(\alpha + y)$ secondo le potenze di x. Abbiamo

$$y = xe^{-y}.$$

Si supponga allora $$y = z + xe^{-y},$$

sicchè $$\varphi(y) = e^{-y},$$

$$f(y) = \text{sen}(\alpha + y).$$

Il termine generale dato dal Teorema di Lagrange è

$$\frac{x^n}{\lfloor n} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \{e^{-nz}\cos(\alpha + z)\},$$

il qualo diviene

$$\frac{x^n}{\lfloor n}(-1)^{n-1}(1+n^2)^{\frac{n-1}{2}}e^{-nz}\cos\{\alpha+z-(n-1)\varphi\},$$

in cui $\cot\varphi = n$, con un procedimento simile a quello nell'Art. 81.

Ponendo $z=0$ in questo, abbiamo per lo sviluppo cercato

$$\operatorname{sen}(\alpha+y) = \operatorname{sen}\alpha + x\cos\alpha + \ldots$$

$$+\frac{x^n}{\lfloor n}(-1)^{n-1}(1+n^2)^{\frac{n-1}{2}}\cos\{\alpha-(n-1)\cot^{-1}n\} + \text{etc.}$$

6. Dato $a - y + x\log y = 0$, trovaro $\operatorname{sen} y$ secondo le potenze di x.

7. Dato $y = z + xy^p e^{qy}$, sviluppare $y^m e^{ny}$ secondo le potenze di x.

8. Dato $y = z + x\operatorname{sen} y$, sviluppare $\operatorname{sen} y$ e $\operatorname{sen} 2y$ secondo le potenze di x.

9. Dato $y = \log(z + x\cos y)$, sviluppare e^y secondo le potenze di x.

10. Dall'equazione

$$xy^4 + 2xy^3 + 3xy^2 + 2y + 1 = 0,$$

determinare y secondo le potenze ascendenti di x.

Risultato. $y = -\frac{1}{2} - \frac{9}{32}x - \frac{9}{32}x^2 - \frac{1395}{4096}x^3$ etc.

11. Se $y = e^{\frac{\pi}{4} + x\,\mathrm{sen}\log y}$, trovare i primi quattro termini dello sviluppo di $\cos\log y$ secondo le potenze di x.

Risultato. $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{x}{2} - \frac{3x^2}{4\sqrt{2}} - \frac{x^3}{3}.$

12. Se $y^3 + my^2 + ny = x$, mostrare che un valore di y è

$$\frac{x}{n} - \frac{m}{n}\left(\frac{x}{n}\right)^2 + \frac{2m^2-n}{n^2}\left(\frac{x}{n}\right)^3 - \frac{5m^3-5mn}{n^3}\left(\frac{x}{n}\right)^4 + \ldots$$

CAPITOLO X.

VALORI LIMITI DELLE FUNZIONI CHE PRENDONO UNA FORMA INDETERMINATA.

144. Nell'equazione, limite di $\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}=1$ quando θ diminuisce indefinitamente, abbiamo un esempio di una frazione che si avvicina ad un limite finito quando il numeratore ed il denominatore tendono entrambi al limite zero. L'oggetto di questo capitolo è di trovare il limite di una frazione qualunque di cui il numeratore ed il denominatore svaniscono ultimamente, ed anche il valore limite di alcune altre *forme indeterminate*.

145. Forma $\frac{0}{0}$.

Si supponga
$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$$
una frazione tale che il numeratore ed il denominatore svaniscano quando $x=a$; si cerca di trovare il limite verso il quale tende la frazione precedente allorchè x si avvicina al limite a.

Abbiamo dimostrato nell'Art. 95 che
$$\varphi(a+h)-\varphi(a)=h\varphi'(a+\theta h),$$
$$\psi(a+h)-\psi(a)=h\psi'(a+\theta_1 h).$$
Se dunque $\varphi(a)=0$ e $\psi(a)=0$, abbiamo, con la divisione,
$$\frac{\varphi(a+h)}{\psi(a+h)}=\frac{\varphi'(a+\theta h)}{\psi'(a+\theta_1 h)}.$$
Si diminuisca h indefinitamente; allora

il limite quando $x=a$ di $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ è $\frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)}$.

146. Si supponga che non solamente

$$\varphi(a)=0, \text{ e } \psi(a)=0,$$

ma anche $\varphi'(a)=0,\ \varphi''(a)=0,\ \ldots \varphi^n(a)=0,$

e $\psi'(a)=0,\ \psi''(a)=0,\ \ldots \psi^n(a)=0.$

Per l'Art. 92,

$$\varphi(a+h)-\varphi(a)-h\varphi'(a)\ldots-\frac{h^n}{\lfloor n}\varphi^n(a)=\frac{h^{n+1}}{\lfloor n+1}\varphi^{n+1}(a+\theta h),$$

$$\psi(a+h)-\psi(a)-h\psi'(a)\ldots-\frac{h^n}{\lfloor n}\psi^n(a)=\frac{h^{n+1}}{\lfloor n+1}\psi^{n+1}(a+\theta_1 h).$$

Quindi, con la divisione, abbiamo

$$\frac{\varphi(a+h)}{\psi(a+h)}=\frac{\varphi^{n+1}(a+\theta h)}{\psi^{n+1}(a+\theta_1 h)}.$$

Si diminuisca h indefinitamente, ed abbiamo

il limite per $x=a$ di $\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ è $\dfrac{\varphi^{n+1}(a)}{\psi^{n+1}(a)}$.

147. Nell'Art. 145, se

$$\psi'(a)=0,$$

e $\varphi'(a)=$ad una quantità finita,

si ha

il limite per $x=a$ di $\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ è l'infinito;

se $\varphi'(a)=0,$

e $\psi'(a)=$ad una quantità finita,

il limite per $x=a$ di $\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ è zero.

Nello stesso modo, possiamo mostrare che se il primo dei coefficienti differenziali $\varphi'(a)$, $\varphi''(a)$, etc., che non svanisce, è di ordine *inferiore* del primo che non svanisce nella serie $\psi'(a)$, $\psi''(a)$, etc., il limite di $\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ per $x=a$ è l'infinito; se di ordine *superiore* il limite è zero.

Questi risultati possono anche ottenersi senza l' uso del Teorema di Taylor.

Se $\varphi(a)=0$ e $\psi(a)=0$, abbiamo

$$\frac{\varphi(a+h)}{\psi(a+h)}=\frac{\varphi(a+h)-\varphi(a)}{\psi(a+h)-\psi(a)}=\frac{\dfrac{\varphi(a+h)-\varphi(a)}{h}}{\dfrac{\psi(a+h)-\psi(a)}{h}}.$$

Si diminuisca ora h indefinitamente, e verrà

il limite per $x=a$ di $\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ è $\dfrac{\varphi'(a)}{\psi'(a)}$.

Se $\varphi'(a)=0$ e $\psi'(a)=0$, abbiamo nello stesso modo

il limite per $x=a$ di $\dfrac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$ è $\dfrac{\varphi''(a)}{\psi''(a)}$.

Quindi, il limite per $x=a$ di $\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ è $\dfrac{\varphi''(a)}{\psi''(a)}$.

Questo procedimento può essere esteso, dando lo stesso risultato dell' Art. 146.

148. Forma $\frac{\infty}{\infty}$.

Siano $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ funzioni che diventano entrambe infinite quando $x=a$; si cerca il limite della frazione $\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}$.

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{\dfrac{1}{\psi(x)}}{\dfrac{1}{\varphi(x)}},$$

e la frazione a dritta prende la forma $\frac{0}{0}$ quando $x=a$; quindi, per la regola precedente il suo limite è

$$\frac{-\dfrac{\psi'(a)}{\{\psi(a)\}^2}}{-\dfrac{\varphi'(a)}{\{\varphi(a)\}^2}} \text{ o } \left\{\frac{\varphi(a)}{\psi(a)}\right\}^2\frac{\psi'(a)}{\varphi'(a)}.$$

Quindi $$\frac{\varphi(a)}{\psi(a)} = \left\{\frac{\varphi(a)}{\psi(a)}\right\}^2 \frac{\psi'(a)}{\varphi'(a)};$$

ondo $$\frac{\varphi(a)}{\psi(a)} = \frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)}.$$

149. Dall'ultimo articolo apparirebbe che il limite di una frazione che tende alla forma $\frac{\infty}{\infty}$, potesse trovarsi considerando il rapporto del coefficiente differenziale del numeratore al coefficiente differenziale del denominatore. Ma, per l'Art. 113, quando per un *valore finito* della variabile una funzione diviene infinita, accade lo stesso pel suo coefficiente differenziale. Quindi se

$$\frac{\varphi(a)}{\psi(a)} \text{ prende la forma } \frac{\infty}{\infty},$$

$$\frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)} \text{ prende la stessa forma},$$

e così il risultato dell'Art. 148 apparirebbe non essere di alcun pratico valore. *Può*, però, accadere che il limite della frazione $\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$ sia più facile a trovarsi che quello di $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$.

Per esempio $$\frac{\log x}{\frac{1}{x}}$$

per $x=0$, prende la forma $\frac{\infty}{\infty}$.

Quì $$\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -x,$$

il limite del quale è 0.

Quindi, il limite di $\frac{\log x}{\frac{1}{x}}$, per $x=0$, è 0.

150. La dimostrazione nell'Art. 148, che è quella data ordinariamente, è soddisfacente solamente nel caso in cui $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ *realmente* ha un limite finito. Poichè noi dividiamo i due lati di un'equazione per questo limite nel che tacitamente si suppone che il limite non sia nè zero nè l'infinito.

Ma la dimostrazione può essere completata nel seguente modo:

Si supponga il limite di $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ realmente zero; allora il limite di $\frac{\psi(x)+\varphi(x)}{\psi(x)}$ è realmente finito, cioè, l'unità. Quindi, è stato dimostrato che

$$\text{il limite di } \frac{\psi(x)+\varphi(x)}{\psi(x)} \text{ per } x=a \text{ è } \frac{\psi'(a)+\varphi'(a)}{\psi'(a)},$$

vale a dire $\quad 1+\text{limite di } \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=1+\frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)}$;

quindi $\quad$ il limite di $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)}$.

Se il limite di $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ è realmente l'infinito, allora il limite di $\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$ è realmente zero, e quindi, come si è detto pocanzi, il limite di $\frac{\psi'(x)}{\varphi'(x)}$ sarà zero. Quindi, il limite di $\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$ sarà l'infinito.

Combinando quindi questo articolo con l'Art. 148, possiamo asserire che se $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ diventano entrambi infiniti per $x=a$, il limite di $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ sarà lo stesso che il limite di $\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$.

151. I due articoli 148 e 150 possono essere rimpiazzati dal modo seguente di esibire la proposizione.

Si supponga $\quad \varphi(a)=\infty$, e $\psi(a)=\infty$.

Allora $\quad \frac{1}{\varphi(a)}=0$ ed $\frac{1}{\psi(a)}=0$;

ora $$\frac{\varphi(a+h)}{\psi(a+h)}=\frac{\dfrac{1}{\psi(a+h)}}{\dfrac{1}{\varphi(a+h)}}=\frac{\dfrac{\psi'(a+\theta h)}{\{\psi(a+\theta h)\}^2}}{\dfrac{\varphi'(a+\theta h)}{\{\varphi(a+\theta h)\}^2}},\ \text{(Art. 106)};$$

quindi $$\frac{\varphi'(a+\theta h)}{\psi'(a+\theta h)}=\frac{\varphi(a+\theta h)}{\psi(a+\theta h)}\cdot\frac{\dfrac{\varphi(a+\theta h)}{\psi(a+\theta h)}}{\dfrac{\varphi(a+h)}{\psi(a+h)}}.$$

Se $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ ha un limite finito quando $x=a$, il limite del secondo fattore nel secondo membro dell'equazione è l'unità. Quindi

$$\text{limite di } \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\text{limite di } \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}.$$

Ma se $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ tende a 0 o all'∞ quando x si avvicina ad a, esso in generale finirà coll'avvicinarsi al limite in modo tale che il secondo fattore sarà nel primo caso minore dell'unità, e nel secondo maggiore. Quindi, $\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$ diventa zero o l'infinito nello stesso tempo che $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$.

152. Nelle regole precedenti per trovare il limite di una funzione che prende la forma $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$ quando $x=a$, non abbiamo fatto alcuna supposizione circa la grandezza di a. Quindi le regole sono spesso applicate al caso nel quale a è infinita. Ma per una diretta dimostrazione di questo caso possiamo procedere nel seguente modo

Supponiamo che si cerchi il limite di $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, per $x=\infty$, conoscendosi che allora o $\varphi(x)=0$ e $\psi(x)=0$, o pure $\varphi(x)=\infty$, e $\psi(x)=\infty$.

Si ponga $x=\frac{1}{y}$, allora

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{\varphi\left(\frac{1}{y}\right)}{\psi\left(\frac{1}{y}\right)}.$$

Ora quando y tende a zero, abbiamo, per le regole precedenti,

$$\text{limite di } \frac{\varphi\left(\frac{1}{y}\right)}{\psi\left(\frac{1}{y}\right)} = \text{limite di } \frac{\frac{1}{y^2}\varphi'\left(\frac{1}{y}\right)}{\frac{1}{y^2}\psi'\left(\frac{1}{y}\right)}$$

$$= \text{limite di } \frac{\varphi'\left(\frac{1}{y}\right)}{\psi'\left(\frac{1}{y}\right)} = \text{limite di } \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}.$$

153. Es. Si cerca il valore di

$$\frac{\frac{1}{x}}{\cot x} \text{ quando } x=0.$$

Differenziando il numeratore ed il denominatore, troviamo che il limite cercato è lo stesso che quello di

$$\frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{-\operatorname{sen}^2 x}} \text{ o di } \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}, \text{ che è l' unità.}$$

Lo stesso risultato può ottenersi scrivendo la frazione proposta sotto la forma $\frac{0}{0}$; così

$$\frac{\frac{1}{x}}{\cot x} = \frac{\tan x}{x} \text{ o } \frac{1}{\cos x}\frac{\operatorname{sen} x}{x}.$$

Il limite di $\frac{1}{\cos x}$ è 1 e quello di $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ è 1; quindi quello della frazione proposta è 1.

Come un altro esempio possiamo trovare il limite di $\frac{x^n}{e^x}$ quando x è infinito, n essendo positivo.

$$\text{Limite di } \frac{x^n}{e^x} = \text{limite di } \frac{nx^{n-1}}{e^x}$$

$$= \text{limite di } \frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x} \text{ etc.}$$

Procedendo così, arriveremo, se n è un intero positivo, alla frazione $\frac{\lfloor n}{e^x}$, il limite della quale è 0. Se n è una frazione, arriveremo ad una frazione che ha e^x al denominatore ed una potenza *negativa* di x al numeratore, la quale anche ha 0 per suo limite.

Quindi il limite di $\frac{x^n}{e^x}$, per $x=\infty$, è zero.

154. Un'osservazione deve essere fatta ad oggetto di prevenire un falso concetto di alcuni dei risultati di questo capitolo. Supponiamo che $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ svaniscano entrambi per $x=a$, e che $\varphi'(a)=0$, mentre $\psi'(a)$ è finito. Diciamo allora, che quando $x=a$,

$$\text{limite di } \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \text{limite di } \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)},$$

intendendo che ciascun lato dell'equazione svanisce. *Non segue da ciò necessariamente che*

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \div \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} \text{ ha l'unità per suo limite.}$$

Es. $\qquad \varphi(x)=x^2, \qquad \psi(x)=\operatorname{sen} x,$

$\qquad\quad \varphi'(x)=2x, \qquad \psi(x)=\cos x.$

Quando x si avvicina al limite zero, possiamo inferirne che, poichè $\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$ si avvicina a zero, accade lo stesso per $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$. Ma evidentemente non è vero che il limite di

$$\frac{x^2}{\operatorname{sen} x} \div \frac{2x}{\cos x} \text{ o di } \frac{x^2 \cos x}{2x \operatorname{sen} x} \text{ sia l'unità;}$$

il limite è infatti $\frac{1}{2}$.

155. Deve osservarsi che vi sono esempii i quali *possono* risolversi per mezzo del Calcolo Differenziale, ma che possono anche essere risoluti, ed alle volte più semplicemente, per mezzo delle ordinarie trasformazioni algebriche. Per esempio

$$\frac{(x-a)^{\frac{1}{3}}}{(x^2-a^2)^{\frac{1}{4}}}$$

quando $x = a$ prende la forma $\frac{0}{0}$. Si ponga $x = a + h$, e la frazione diviene

$$\frac{h^{\frac{1}{3}}}{h^{\frac{1}{4}}(2a+h)^{\frac{1}{4}}} \quad \text{o} \quad \frac{h^{\frac{1}{12}}}{(2a+h)^{\frac{1}{4}}};$$

ed il limite, per $h=0$, è 0.

In secondo luogo, supponiamo che si debba trovare il limite di

$$\frac{\sqrt{x}-1+\sqrt{(x-1)}}{\sqrt{(x^2-1)}}$$

quando x si avvicina all'unità; si ponga $x=1+h$, e la frazione diviene

$$\frac{\sqrt{(h+1)}-1+\sqrt{h}}{\sqrt{(h^2+2h)}}.$$

Si moltiplichino il numeratore ed il denominatore per

$$\sqrt{(h+1)}+1-\sqrt{h},$$

ed otteniamo

$$\frac{2\sqrt{h}}{\sqrt{h}\sqrt{(h+2)}\,\{\sqrt{(h+1)}+1-\sqrt{h}\}} \quad \text{o} \quad \frac{2}{\sqrt{(h+2)}\,\{\sqrt{(h+1)}+1-\sqrt{h}\}},$$

ed il limite di questo, quando $h=0$, è $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

156. Vi sono casi nei quali non solamente $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ svaniscono, ma tutti i loro coefficienti differenziali, ed in cui, per conseguenza, non possiamo determinare il limite di $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$.

Infatti si supponga

$$\varphi(x)=a^{-\frac{1}{x^n}},$$

a ed n essendo numeri positivi, ed a maggiore dell'unità: abbiamo

$$\varphi'(x)=\frac{n\log a.a^{-\frac{1}{x^n}}}{x^{n+1}},$$

$$\varphi''(x)=n\log a.a^{-\frac{1}{x^n}}\left\{\frac{n\log a}{x^{2(n+1)}}-\frac{n+1}{x^{n+2}}\right\},$$

etc.

Si ponga $\frac{1}{x} = z$,

allora $$\varphi'(x) = \frac{n \log a . z^{n+1}}{a^{z^n}},$$

$$\varphi''(x) = \frac{n \log a \{ n \log a . z^{2(n+1)} - (n+1) z^{n+2} \}}{a^{z^n}};$$

ed il valore $x=0$ corrisponde a $z=\infty$. Ma è facile vedere che ogni espressione della forma

$$\frac{z^m}{a^{z^n}},$$

in cui a, m, n, sono numeri positivi, ed a maggiore dell'unità, è zero quando z è infinito. Poichè se applichiamo a questo esempio la regola per trovare il valore di una frazione che prende la forma $\frac{\infty}{\infty}$ e differenziamo r volte successivamente, r essendo il numero intero prossimamente maggiore di m, abbiamo

$$\text{limite di } \frac{z^m}{a^{z^n}} = \text{limite di } \frac{k}{\psi(z)},$$

in cui k è una costante, e $\psi(z)$ una funzione di z che è infinita quando z è infinito. Per conseguenza, tutt'i coefficienti differenziali di $\varphi(x)$ svaniscono per $x=0$.

Se dunque abbiamo

$$\varphi(x) = a^{-\frac{1}{x^n}},$$

$$\psi(x) = b^{-\frac{1}{x^{n'}}},$$

in cui b è un numero positivo maggiore dell'unità, ed n' anche positivo, i coefficienti differenziali di tutti gli ordini dei due termini della frazione svaniranno per $x=0$, ed il limite non può essere trovato con questo metodo.

Nel caso di $n'=n$, la frazione diviene

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-\frac{1}{x^n}};$$

questa, quando $x=0$, sarà 0 o ∞, secondo che a è maggiore o minore di b.

157. La frazione

$$\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$$

prende la forma $\frac{0}{0}$ quando $x=0$. Si ponga $x=\frac{1}{y}$ ed abbiamo $\frac{y}{e^y}$, di cui il limite, per y infinito, è 0, per l'Art. 153;

$$\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}, \text{ o } \frac{1}{x}\times e^{\frac{1}{x}} \text{ è naturalmente infinito per } x=0.$$

Quindi, $\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}$ è 0 o ∞ quando x si avvicina al limite 0, secondo che si suppone x negativo o positivo.

158. Forma $0\times\infty$. Supponiamo $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ due funzioni di x, tali che $\varphi(a)=0$, e $\psi(a)=\infty$; si cerca il limite di $\varphi(x)\,\psi(x)$ quando x si avvicina ad a;

$$\varphi(x)\,\psi(x)=\frac{\varphi(x)}{\frac{1}{\psi(x)}},$$

e siccome la frazione a dritta prende la forma $\frac{0}{0}$ quando $x=a$, il suo valore limite può essere trovato con le regole già date.

Es. Sia
$$\varphi(x)=\log\left(2-\frac{x}{a}\right),$$
$$\psi(x)=\tan\frac{\pi x}{2a}.$$

Qui, $\varphi(x)\,\psi(x)$ prende la forma $0\times\infty$ quando $x=a$.

Allora
$$\log\left(2-\frac{x}{a}\right)\tan\frac{\pi x}{2a}$$
$$=\frac{\log\left(2-\frac{x}{a}\right)}{\cot\frac{\pi x}{2a}}.$$

Il limite di questa espressione quando $x=a$, si trova ponendo $x=a$ in

$$\frac{-\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{2-\frac{x}{a}}}{-\frac{\pi}{2a}\cdot\frac{1}{\operatorname{sen}^2\frac{\pi x}{2a}}}$$

che dà

$$\frac{2}{\pi}.$$

Ancora, $$x^m(\log x)^n,$$

in cui m ed n sono positivi, prende la forma $0\times\infty$, quando $x=0$.

Qui $$\frac{x^m}{\frac{1}{(\log x)^n}}$$ prende la forma $\frac{0}{0}$

quando $x=0$; il suo limite è lo stesso che quello di

$$\frac{mx^{m-1}}{-\frac{n}{x(\log x)^{n+1}}};$$

che non conduce allo scopo.

Se poniamo $x=e^{-y}$, allora $x^m(\log x)^n$ diviene

$$(-1)^n\frac{y^n}{e^{my}};$$

di cui il valore, quando y è ∞, è 0. Art. 153.

Si noti accuratamente il risultato di questo caso, incontrandosi spesso nelle ricerche matematiche.

159. Forme 0^0, ∞^0, 1^∞.

Siano $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ due funzioni di x, tali che quando $x=a$, l'espressione

$$\{\varphi(x)\}^{\psi(x)}$$

prenda una delle forme 0^0, ∞^0, 1^∞; si cerca il valore limite di questa espressione. Poichè

$$\varphi(x)=e^{\log\varphi(x)},$$

abbiamo $$\{\varphi(x)\}^{\psi(x)}=e^{\psi(x)\log\varphi(x)}.$$

Ora $\psi(x)\log\varphi(x)$ in ciascuno dei casi proposti prende la forma $0\times\infty$, ed il suo valore limite può essere trovato per l'Art. 158, e così il valore di $\{\varphi(x)\}^{\psi(x)}$ sarà conosciuto.

Es. x^x, per $x=0$, prende la forma 0^0;

$$x^x = e^{x\log x};$$

ed $x\log x=0$, quando $x=0$, (Art. 158);

quindi, $x^x=1$, quando $x=0$.

Ancora, $\left(\frac{1}{x}\right)^{sen\,x}$ prende la forma ∞^0 per $x=0$; si ha

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{sen\,x} = e^{-sen\,x\log x}.$$

Ora, $$\operatorname{sen}x\log x = \frac{\operatorname{sen}x}{x}\cdot x\log x;$$

quando $x=0$, abbiamo

$$\frac{\operatorname{sen}x}{x}=1,$$

$$x\log x=0,\ \text{(Art. 158)},$$

onde $\operatorname{sen}x\log x=0$, quando $x=0$,

quindi, $\left(\frac{1}{x}\right)^{sen\,x}=1$, quando $x=0$.

Quando $x=a$, l'espressione

$$\left(2-\frac{x}{a}\right)^{tan\frac{\pi x}{2a}}$$

prende la forma 1^∞.

L'espressione precedente $= e^{tan\frac{\pi x}{2a}\log\left(2-\frac{x}{a}\right)}$

$= e^{\frac{2}{\pi}}$ quando $x=a$, (Art. 158).

160. Forma $\infty-\infty$.

Siano $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ due funzioni di x che diventino infinite quando $x=a$, allora

$$\varphi(x)-\psi(x)$$

prende la forma $\infty-\infty$; si cerca il valore dell'espressione.

Si ponga $y = \varphi(x) - \psi(x)$,

allora
$$e^y = e^{\varphi(x) - \psi(x)}$$
$$= \frac{e^{-\psi(x)}}{e^{-\varphi(x)}}.$$

Così, per $x = a$, y prende la forma $\frac{0}{0}$ ed il suo valore può essere ricercato con l'Art. 145.

O pure possiamo procedere come segue,
$$y = \varphi(x)\left\{1 - \frac{\psi(x)}{\varphi(x)}\right\};$$
quindi y è infinito a meno che il limite di $\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$ non sia l'unità; se il limite di $\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$ è l'unità, poichè
$$y = \frac{1 - \frac{\psi(x)}{\varphi(x)}}{\frac{1}{\varphi(x)}}$$
esso prende la forma $\frac{0}{0}$.

Es. Si supponga $y = \tan x - \sec x$;
allora y prende la forma $\infty - \infty$ quando $x = \frac{\pi}{2}$.

Inoltre
$$y = \tan x\left(1 - \frac{\sec x}{\tan x}\right)$$
$$= \frac{1 - \operatorname{cosec} x}{\cot x};$$
questo prende la forma $\frac{0}{0}$, ed il suo valore limite è
$$\frac{\operatorname{cosec} x \cot x}{-\operatorname{cosec}^2 x} \text{ o } 0.$$

161. Il limite di $\frac{F(x)}{x}$ quando $x = \infty$, supponendo $F(x)$ essere allora infinita, sarà lo stesso di quello di $\frac{F'(x)}{1}$, o $F'(x)$, (Art. 151).

Ma, $$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=F'(x+\theta h).$$

Se x si fa crescere indefinitamente il limite del secondo membro dell'equazione è $F'(x)$.

Quindi,

$$\text{limite per } x=\infty \text{ di } \frac{F(x)}{x} = \text{limite per } x=\infty \text{ di } \frac{F(x+h)-F(x)}{h}.$$

Se per semplicità si pone $h=1$, abbiamo

$$\text{limite di } \frac{F(x)}{x} = \text{limite di } \{F(x+1)-F(x)\}.$$

162. Il limite di $\{F(x)\}^{\frac{1}{x}}$ quando x è infinito, è lo stesso che quello di

$$e^{\frac{\log F(x)}{x}}.$$

Ma, per l'Art. 161, supponendo $F(x)$ diventare infinito con x, il limite di $\frac{\log F(x)}{x}$ è lo stesso che il limite di

$$\log F(x+1)-\log F(x),$$

o di $$\log\frac{F(x+1)}{F(x)}.$$

Quindi il limite, per $x=\infty$, di $\{F(x)\}^{\frac{1}{x}}$

$$=\text{al limite di } \frac{F(x+1)}{F(x)}.$$

Supponiamo, per esempio, che si cerchi il limite quando x è infinito di $\left\{\frac{x^x}{\lfloor x}\right\}^{\frac{1}{x}}$.

Per il teorema or ora dimostrato il limite richiesto

$$=\text{limite di } \frac{(x+1)^{x+1}}{\lfloor x+1}\frac{\lfloor x}{x^x}$$

$$=\text{limite di } \left(\frac{x+1}{x}\right)^x$$

$$=\text{limite di } \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

$= e$ per l'Art. 16.

163. Alcune poche osservazioni si possono fare sulle frazioni indeterminate che racchiudono più di una variabile.

Una funzione di due variabili può prendere la forma $\frac{0}{0}$, 1° quando una delle variabili rimane indeterminata e l'altra ha un valore particolare, 2° quando tutte e due ricevono valori particolari.

Come un esempio del primo caso, si supponga

$$z = \frac{c(x^2 - a^2)}{y(x-a) + (x-a)^2};$$

se si pone $x = a$ abbiamo $z = \frac{0}{0}$, qualunque sia y. Ma togliendo il fattore $x - a$ dal numeratore e dal denominatore di z, si ha

$$z = \frac{c(x+a)}{y + x - a}.$$

Quindi, per $x = a$, abbiamo

$$z = \frac{2ca}{y}.$$

Questo caso è molto semplice, e sempre che s'incontra l'applicazione delle regole precedenti darà il valore limite verso il quale z si avvicina a misura che x si avvicina al suo limite.

Come un esempio del secondo caso, si supponga

$$z = \frac{c(x-a)}{y-b}.$$

Questa frazione prende la forma $\frac{0}{0}$ quando $x = a$ ed $y = b$, ed è realmente indeterminata. Infatti supposto $y - b = m(x - a)$, allora

$$z = \frac{c}{m}.$$

Quindi il valore di z è indeterminato, poichè x ed y essendo indipendenti m può avere qualunque valore ci piace.

164. Può accadere che i valori che prende una tale funzione, benchè infiniti di numero, siano confinati tra certi limiti. Per esempio si supponga

$$z = \frac{c(x-a)(y-b)}{(x-a)^2 + (y-b)^2}.$$

Si prenda $$y - b = m(x-a);$$

quindi $$z = \frac{cm}{m^2+1}$$

$$= \frac{c}{m + \frac{1}{m}}.$$

Quì il più grande valore di z si ha per $m=1$, e z è sempre compreso tra $\frac{c}{2}$ e $-\frac{c}{2}$.

165. Diamo ancora due altri esempii: 1°, sia

$$z = \frac{(x-a)^m + c(y-b)^n}{(x-a)^p + c(y-b)^q};$$

questo prende la forma $\frac{0}{0}$ quando $x=a$ ed $y=b$.

Si ponga $x - a = h$ ed $y - b = k$;

quindi $$z = \frac{h^m + ck^n}{h^p + ck^q}.$$

Se ora si prende $k = Ah^\alpha$, abbiamo

$$z = \frac{h^m + cA^n h^{\alpha n}}{h^p + cA^q h^{\alpha q}},$$

e, secondo le diverse ipotesi che facciamo rispetto ad α, m, p, etc., otterremo per z un valore finito, infinito, o zero,

2.° Sia $$z = \frac{(x-y)a^n - (a-y)x^n + (a-x)y^n}{(x-y)(a-y)(a-x)}.$$

Se $x = y = a$, questo prende la forma $\frac{0}{0}$. Si pongano $a+h$ ed $a+k$ per x ed y rispettivamente; avremo

$$z = \frac{(h-k)a^n + k(a+h)^n - h(a+k)^n}{(h-k)kh}.$$

Se sviluppiamo $(a+h)^n$ ed $(a+k)^n$, e facciamo alcune riduzioni, otteniamo

$$z = \frac{n(n-1)}{1.2} a^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} a^{n-3}(h+k) + \text{etc.}$$

Quindi, ponendo h e k eguali a zero, abbiamo

$$z = \frac{n(n-1)}{1.2} a^{n-2}.$$

Questo risultato può anche trovarsi esaminando il limite verso il quale tende z quando x si avvicina ad y, e quindi il limite verso cui tende questo risultato quando y si avvicina ad a.

L'articolo seguente deve essere omesso sino a che lo studente abbia letto il Cap. XI.

166. Generalmente, se $z = \dfrac{f(x, y)}{F(x, y)}$, ed il numeratore e denominatore di z svaniscono per certi valori di x ed y, il valore di z è realmente indeterminato, ed infatti dipende dalla relazione arbitraria che a nostra scelta stabiliamo tra x ed y. Supponiamo che $x=a$, $y=b$ siano i valori che fanno prendere a z la forma $\frac{0}{0}$; e poniamo $y = \psi(x)$, in cui $\psi(x)$ è una funzione qualunque di cui il valore è b quando $x=a$.

Con ciò il numeratore ed il denominatore di z diventano funzioni della sola x; e per le regole precedenti per determinare il valore di una frazione che prende la forma $\frac{0}{0}$, abbiamo

$$z = \frac{\left(\frac{df}{dx}\right) + \left(\frac{df}{dy}\right)\psi'(x)}{\left(\frac{dF}{dx}\right) + \left(\frac{dF}{dy}\right)\psi'(x)},$$

x essendo messo $=a$ ed $y=b$ dopo eseguite le differenziazioni. Questo valore è indeterminato, poichè $\psi'(x)$ è una funzione del tutto arbitraria.

Ma se $\left(\frac{df}{dx}\right)$ e $\left(\frac{dF}{dx}\right)$ svaniscono,

o se $\left(\frac{df}{dy}\right)$ e $\left(\frac{dF}{dy}\right)$ svaniscono,

allora il valore di z diviene determinato.

Il valore di z è anche determinato se

$$\frac{\left(\frac{df}{dx}\right)}{\left(\frac{dF}{dx}\right)}=\frac{\left(\frac{df}{dy}\right)}{\left(\frac{dF}{dy}\right)}.$$

Se $\left(\frac{df}{dx}\right)=0,\ \left(\frac{dF}{dx}\right)=0,\ \left(\frac{df}{dy}\right)=0,\ \left(\frac{dF}{dy}\right)=0,$

allora procedendo ad una seconda differenziazione abbiamo

$$z=\frac{\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)+2\left(\frac{d^2f}{dx\,dy}\right)\psi'(x)+\left(\frac{d^2f}{dy^2}\right)\overline{\psi'(x)}|^2}{\left(\frac{d^2F}{dx^2}\right)+2\left(\frac{d^2F}{dx\,dy}\right)\psi'(x)+\left(\frac{d^2F}{dy^2}\right)\overline{\psi'(x)}|^2},\ \text{(Art. 176)},$$

che è generalmente indeterminato, poichè $\psi'(x)$ è una funzione arbitraria.

Es. 1. $z=\frac{\log x+\log y}{x+2y-3},\quad a=1,\quad b=1;$

$$\left(\frac{df}{dx}\right)=\frac{1}{x}=1,\quad \text{per } x=1,$$

$$\left(\frac{df}{dy}\right)=\frac{1}{y}=1,\quad \text{per } y=1,$$

$$\left(\frac{dF}{dx}\right)=1,\quad \left(\frac{dF}{dy}\right)=2;$$

quindi $$z=\frac{1+\psi'(x)}{1+2\psi'(x)},$$

che è realmente indeterminato, e può prendere ogni valore tra $+\infty$ e $-\infty$.

Es. 2. In secondo luogo, si supponga

$$z=\frac{(x-1)^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{3}{2}}-1}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}\cdot y+1}.$$

Quì z prende la forma $\frac{0}{0}$ quando $x=1$ ed $y=1$.

Inoltre allora $\left(\frac{df}{dx}\right)=0$ e $\left(\frac{dF}{dx}\right)=0$.

Quindi z ha un valore determinato, cioè, $-\frac{3}{2}$.

Es. 3. Si supponga $z=\frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}$.

Quì quando $x=0$ ed $y=0$, abbiamo

$$\left(\frac{df}{dx}\right)=0,\ \left(\frac{df}{dy}\right)=0,\ \left(\frac{dF}{dx}\right)=0,\ \left(\frac{dF}{dy}\right)=0,$$

e $$z=\frac{1+2\psi'(x)+\overline{\psi'(x)}|^2}{1+\overline{\psi'(x)}|^2}=\frac{\{1+\psi'(x)\}^2}{1+\overline{\psi'(x)}|^2}$$

$$=\frac{(1+u)^2}{1+u^2}\text{ supponiamo.}$$

Quì il valore di z è indeterminato; ma si troverà che è confinato tra i limiti 0 e 2, come può mostrarsi scrivendo l'ultima frazione sotto la forma $1+\frac{2u}{1+u^2}$, ricordandosi che $\frac{2u}{1+u^2}$ non è mai maggiore dell'unità.

167. Nel risolvere gli esempî su questo capitolo vi sono varie considerazioni che abbrevieranno il lavoro delle operazioni, come si vedrà nel seguente caso.

Trovare il valore di $\frac{\log(1+x+x^2)+\log(1-x+x^2)}{\sec x-\cos x}$ quando $x=0$.

L'espressione proposta prende la forma $\frac{0}{0}$ per $x=0$. Se procediamo nel modo ordinario, troveremo dopo alcune riduzioni che il coefficiente differenziale del numeratore è

$$\frac{2x+4x^3}{1+x^2+x^4}$$

e che il coefficiente differenziale del denominatore è

$$\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}+\operatorname{sen} x.$$

Così otteniamo di nuovo la forma $\frac{0}{0}$, e possiamo continuare nella via ordinaria il processo della valutazione. Possiamo però ottenere il risultato più facilmente ponendo la frazione che dobbiamo ora valutare sotto la forma:

$$\frac{2(1+2x^2)\cos^2 x}{(1+x^2+x^4)(1+\cos^2 x)} \times \frac{x}{\operatorname{sen} x}.$$

Quì il primo fattore non è indeterminato quando $x=0$; il suo valore è allora l'unità. Il secondo fattore prende la forma $\frac{0}{0}$, ed il suo valore limite si conosce essere l'unità. Quindi l'unità è il richiesto valore limite dell'espressione originale.

O pure l'espressione originale può essere valutata nel seguente modo. Essa si può mettere sotto la forma

$$\frac{\cos x \log(1+x^2+x^4)}{\operatorname{sen}^2 x}.$$

Ora $\cos x = 1$ quando $x=0$; non occorre quindi fare attenzione a questo fattore, ma considerare quello che dobbiamo valutare

$$\frac{\log(1+x^2+x^4)}{\operatorname{sen}^2 x}$$

quando $x=0$; e possiamo procedere nel modo solito differenziando il numeratore ed il denominatore. O se ci è permesso di usare i risultati degli sviluppi delle funzioni abbiamo

$$\frac{\log(1+x^2+x^4)}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{x^2+x^4-\frac{1}{2}(x^2+x^4)^2+\frac{1}{3}(x^2+x^4)^3-\dots}{\left(x-\frac{x^3}{6}+\dots\right)^2}$$

$$=\frac{x^2+\frac{1}{2}x^4-\dots}{x^2-\frac{1}{3}x^4+\dots}$$

$$=\frac{1+\frac{1}{2}x^2-\dots}{1-\frac{1}{3}x^2+\dots}$$

$$=1 \text{ quando } x=0.$$

ESEMPII.

Trovare i limiti delle seguenti funzioni.

1. $\dfrac{\log x}{x-1}$, quando $x=1$. *Ris.* 1.

2. $\dfrac{x-1}{x^n-1}$, quando $x=1$. *Ris.* $\dfrac{1}{n}$.

3. $\dfrac{e^x-e^{-x}}{\operatorname{sen} x}$, $x=0$. *Ris.* 2.

4. $\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\operatorname{sen} x}$, $x=0$. *Ris.* 2.

5. $\dfrac{x-\operatorname{sen}^{-1}x}{(\operatorname{sen} x)^3}$, $x=0$. *Ris.* $-\dfrac{1}{6}$.

6. $\dfrac{a^x-b^x}{x}$, $x=0$. *Ris.* $\log\dfrac{a}{b}$.

7. $\dfrac{\tan x-x}{x-\operatorname{sen} x}$, $x=0$. *Ris.* 2.

8. $\dfrac{x-\operatorname{sen} x}{x^3}$, $x=0$. *Ris.* $\dfrac{1}{6}$.

9. $\dfrac{\operatorname{sen} 3x}{x-\frac{3}{2}\operatorname{sen} 2x}$ $x=0$. *Ris.* $-\dfrac{3}{2}$.

10. $\dfrac{1-x+\log x}{1-\sqrt{(2x-x^2)}}$, $x=1$. *Ris.* -1.

11. $\dfrac{1}{\log x}-\dfrac{x}{\log x}$, $x=1$. *Ris.* -1.

12. $\dfrac{e^x-2\cos x+e^{-x}}{x\operatorname{sen} x}$ $x=0$. *Ris.* 2.

13. $\dfrac{\operatorname{sen} 2x+2\operatorname{sen}^2 x-2\operatorname{sen} x}{\cos x-\cos^2 x}$, $x=0$. *Ris.* 4.

14. $x \tan x - \frac{\pi}{2} \sec x$, $\quad x = \frac{\pi}{2}$. $\quad$ *Ris.* -1.

15. $\frac{(x-2)e^x + x + 2}{(e^x - 1)^3}$, $\quad x = 0$. $\quad$ *Ris.* $\frac{1}{6}$.

16. $\frac{x^4 + 3x^3 - 7x^2 - 27x - 18}{x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 27x - 18}$, $\quad x = 3$. $\quad$ *Ris.* 10.

$x = -3$. $\quad$ *Ris.* $\frac{1}{10}$.

17. $\frac{x\sqrt{(3x - 2x^4)} - x\sqrt[5]{x}}{1 - x^{\frac{2}{3}}}$, $\quad x = 1$. $\quad$ *Ris.* $\frac{81}{20}$.

18. $\frac{x^{\frac{3}{2}} - 1 + (x-1)^{\frac{3}{2}}}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}} - x + 1}$, $\quad x = 1$. $\quad$ *Ris.* $-\frac{3}{2}$.

19. $\frac{x^{\frac{3}{2}} - 1 + (x-1)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(x^2-1)}}$, $\quad x = 1$. $\quad$ *Ris.* 0.

20. $\frac{m \operatorname{sen} \theta - \operatorname{sen} m\theta}{\theta(\cos\theta - \cos m\theta)}$, $\quad \theta = 0$. $\quad$ *Ris.* $\frac{m}{3}$.

21. $\frac{\theta^2}{1 - \cos m\theta}$, $\quad \theta = 0$. $\quad$ *Ris.* $\frac{2}{m^2}$.

22. $\frac{\operatorname{sen}(\theta + h) - \operatorname{sen}(\theta - h)}{\cos(\theta + h) - \cos(\theta - h)}$, $\quad h = 0$. $\quad$ *Ris.* $-\cot\theta$.

23. $\frac{\tan nx - n \tan x}{n \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} nx}$, $\quad x = 0$. $\quad$ *Ris.* 2.

24. $\frac{\sqrt{(a^2 - x^2)} + a - x}{\sqrt{\left(a^2 - \frac{x^3}{a}\right)} + \sqrt{(ax - x^2)}}$, $\quad x = a$. $\quad$ *Ris.* $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3} + 1}$.

25. $\frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{(x - a)}}{\sqrt{(x^2 - a^2)}}$, $\quad x = a$. $\quad$ *Ris.* $\frac{1}{\sqrt{(2a)}}$.

26. $\sqrt{\left(\frac{2 + \cos 2x - \operatorname{sen} x}{x \operatorname{sen} 2x + x \cos x}\right)} - \left(\frac{\pi - 2x}{2 \operatorname{sen} 2x}\right)^2$, $\quad x = \frac{\pi}{2}$. $\quad$ *Ris.* $-\frac{1}{4}$.

27. $2^x \operatorname{sen}\dfrac{a}{2^x}$, $\quad x=\infty$. *Ris.* a.

28. $(a^{\frac{1}{x}}-1)x$, $\quad x=\infty$. *Ris.* $\log a$.

29. $\left(\dfrac{a}{x}+1\right)^x$, $\quad x=\infty$. *Ris.* e^a.

30. $\dfrac{m^x \operatorname{sen} nx - n^x \operatorname{sen} mx}{\tan nx - \tan mx}$, $\quad$ (1) $x=0$. *Ris.* 1.
(2) $m=n$.
Ris. $n^{x-1}(n\cos nx - \operatorname{sen} nx)\cos^2 nx$.

31. $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$, $\quad x=0$. *Ris.* 1.

32. $\left(\dfrac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$, $\quad x=0$. *Ris.* 1.

33. $\left(\dfrac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ $\quad x=0$. *Ris.* $e^{\frac{1}{3}}$.

34. $\left(\dfrac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^3}}$, $\quad x=0$. *Ris.* ∞.

35. $(\cos mx)^{\frac{n}{x}}$, $\quad x=0$. *Ris.* 1.

36. $(\cos mx)^{\frac{n}{x^2}}$, $\quad x=0$. *Ris.* $e^{-\frac{nm^2}{2}}$.

37. $(\cos mx)^{\frac{n}{x^3}}$, $\quad x=0$. *Ris.* 0.

38. $\dfrac{x^3(\cot x)^2+\operatorname{sen} x}{x}$, $\quad x=0$. *Ris.* 2.

39. $\dfrac{(e^x-e^{-x})^2-2x^2(e^x+e^{-x})}{x^4}$, $\quad x=0$. *Ris.* $-\dfrac{2}{3}$.

40. $\dfrac{1-\sqrt{(1-x)}}{\sqrt{(1+x)}-\sqrt{(1+x^2)}}$, $\quad x=0$. *Ris.* 1.

41. $(\operatorname{sen} x)^{\tan x}$, $x = \frac{\pi}{2}$. *Ris.* 1.

42. $\frac{\sqrt{(2)} - \operatorname{sen} x - \cos x}{\log \operatorname{sen} 2x}$, $x = \frac{\pi}{4}$. *Ris.* $-\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

43. $\sqrt{(a^2 - x^2)} \cdot \cot \left\{ \frac{\pi}{2} \sqrt{\left(\frac{a-x}{a+x} \right)} \right\}$, $x = a$. *Ris.* $\frac{4a}{\pi}$.

44. $(1-x) \tan \frac{\pi x}{2}$, $x = 1$. *Ris.* $\frac{2}{\pi}$.

45. $x^{\frac{1}{1-x}}$, $x = 1$. *Ris.* $\frac{1}{e}$.

46. $x^{x^{\pm a}}$, $x = 0$. *Ris.* col segno superiore 1, col segno inferiore 0.

47. $\frac{\sec \frac{\pi x}{2}}{\log (1-x)}$, $x = 1$. *Ris.* ∞.

48. $(Ax^m + Bx^{m-1} \ldots + Mx + N)^{\frac{1}{x}}$, $x = \infty$. *Ris.* 1.

49. $\frac{1}{\sqrt{x}} \log \frac{2x + b + 2\sqrt{(ax + bx + x^2)}}{b + 2\sqrt{(ax)}}$, $x = 0$.

Ris. $\frac{2}{b} \{ \sqrt{(a+b)} - \sqrt{a} \}$.

50. $\sqrt{\left\{ \frac{1}{x(x-1)} + \frac{1}{4x^2} \right\}} - \frac{1}{2x}$, $x = 0$. *Ris.* -1.

51. $\frac{\cos x\theta - \cos a\theta}{e^{-x^2\theta} - e^{-a^2\theta}}$, $x = a$. *Ris.* $\frac{\operatorname{sen} a\theta e^{a^2\theta}}{2a}$.

52. $\frac{e^x + \log \left(\frac{1-x}{e} \right)}{\tan x - x}$, $x = 0$. *Ris.* $-\frac{1}{2}$.

53. $\frac{e^x \operatorname{sen} x - e^a \{ \operatorname{sen} a + \sqrt{2} (x-a) \cos (a - \frac{1}{4}\pi) \}}{e^x - e^a (x + 1 - a)}$, $x = a$.

Ris. $2 \cos a$.

54. $\left(\dfrac{a_1^{\frac{1}{x}} + a_2^{\frac{1}{x}} + \ldots + a_n^{\frac{1}{x}}}{n}\right)^{nx}$, $x = \infty$. *Ris.* $a_1 a_2 \ldots a_n$.

55. $\dfrac{(\theta + \operatorname{sen}\theta - 4\operatorname{sen}\frac{1}{2}\theta)^4}{(3 + \cos\theta - 4\cos\frac{1}{2}\theta)^3}$, $\theta = 0$. *Ris.* $\dfrac{128}{81}$.

56. $\left\{\dfrac{\log x}{x}\right\}^{\frac{1}{x}}$, $x = \infty$. *Ris.* 1.

57. $\dfrac{(\log x)^{\frac{2}{3}} + (1 - x^2)^{\frac{3}{4}}}{\operatorname{sen}^{\frac{2}{3}}(x - 1)}$ $x = 1$. *Ris.* 1.

58. Dimostrare che quando x è infinito $\dfrac{a^{x^m}}{b^{x^n}}$ è infinito o zero, secondo che m è maggiore o minore di n; a e b essendo tutti e due maggiori dell' unità.

59. Mostrare che quando x è infinito

$$x - x^2 \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2}.$$

60. Se $u\sqrt{(xc)} = \tan^{-1}\dfrac{a\sqrt{x}}{\sqrt{c}} + \log\left\{\dfrac{a\sqrt{x}}{\sqrt{c}} + \sqrt{\left(1 + \dfrac{a^2x}{c}\right)}\right\}$, mostrare che quando $x = 0$, $u = \dfrac{2a}{c}$, e $\dfrac{du}{dx} = -\dfrac{a^3}{2c^2}$; e quando $x = \infty$, $u = 0$, e $\dfrac{du}{dx} = 0$.

CAPITOLO XI.

COEFFICIENTE DIFFERENZIALE DI UNA FUNZIONE DI FUNZIONI E DELLE FUNZIONI IMPLICITE.

168. Si supponga u una funzione di y e z, ed y e z stesse funzioni di x, si cerca di trovare $\frac{du}{dx}$. Naturalmente ciò potrebbe ottenersi sostituendo in u per y e z i loro valori espressi in x, con la quale sostituzione u diviene una funzione esplicita di x, e $\frac{du}{dx}$ può essere trovato con i metodi precedenti. Ma è spesso conveniente di avere una regola che dia $\frac{du}{dx}$ senza richiedere la sostituzione per y e z. A questa regola ora procediamo.

169. Si supponga $u = \varphi(y, z)$,

in cui y e z sono tutte e due funzioni di x. Diventi x $x + \Delta x$, ed in conseguenza y, z, ed u, diventino rispettivamente $y + \Delta y$, $z + \Delta z$, ed $u + \Delta u$. Allora

$$\Delta u = \varphi(y + \Delta y, z + \Delta z) - \varphi(y, z)$$

$$= \varphi(y + \Delta y, z + \Delta z) - \varphi(y, z + \Delta z) + \varphi(y, z + \Delta z) - \varphi(y, z);$$

onde
$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{\varphi(y + \Delta y, z + \Delta z) - \varphi(y, z + \Delta z)}{\Delta y} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$
$$+ \frac{\varphi(y, z + \Delta z) - \varphi(y, z)}{\Delta z} \frac{\Delta z}{\Delta x}.$$

Ora Δx e per conseguenza Δy, Δz, e Δu, diminuiscano senza limite; allora

$$\text{il limite di } \frac{\Delta u}{\Delta x} \text{ è } \frac{du}{dx},$$

$$\text{il limite di } \frac{\Delta y}{\Delta x} \text{ è } \frac{dy}{dx},$$

$$\text{il limite di } \frac{\Delta z}{\Delta x} \text{ è } \frac{dz}{dx}.$$

Il limite di $\frac{\varphi(y, z+\Delta z)-\varphi(y, z)}{\Delta z}$ è il coefficiente differenziale di $\varphi(y, z)$ o u, preso nella supposizione che z sia la sola variabile; e può perciò essere dinotato con $\frac{du}{dz}$.

Il limite di $\frac{\varphi(y+\Delta y, z+\Delta z)-\varphi(y, z+\Delta z)}{\Delta y}$, se Δz non cangiasse, sarebbe il coefficiente differenziale di $\varphi(y, z+\Delta z)$ rispetto ad y. Ma siccome Δz diminuisce senza limite con Δy, il limite è il coefficiente differenziale di $\varphi(y, z)$, *preso nella supposizione che y sia la sola variabile.*

Abbiamo dunque finalmente

$$\frac{du}{dx}=\frac{du}{dy}\,\frac{dy}{dx}+\frac{du}{dz}\,\frac{dz}{dx}.$$

170. In questo risultato $\frac{du}{dy}$ dinota, come si è stabilito, « il coefficiente differenziale di u, preso rispetto ad y, *supponendo variare la sola* y ». Non è impossibile che il lettore sia inclinato a dire. « Ma y e z essendo tutte e due funzioni di x, se y varia, z *deve* variare ancora, come dunque *posso* fare la supposizione che varii solamente la y? » La sua propria ulteriore riflessione probabilmente rimuoverà la difficoltà, se questa ne è una. Però se egli non fosse abile di soddisfare a se stesso, gli si potrebbe suggerire che noi non facciamo la supposizione che varii solamente y come una *finale* supposizione. Noi ammettiamo la variazione sì di y che di z, ma è conveniente al nostro scopo di considerare queste variazioni *una sola per volta.*

Si è solito di scrivere $\left(\frac{du}{dy}\right)$ e $\left(\frac{du}{dz}\right)$, invece di $\frac{du}{dy}$ e $\frac{du}{dz}$, le parentesi servendo a rammentarci le supposizioni fatte nel

trovare i valori di questi coefficienti differenziali. Quindi l'equazione precedente si scriverebbe

$$\frac{du}{dx}=\left(\frac{du}{dy}\right)\frac{dy}{dx}+\left(\frac{du}{dz}\right)\cdot\frac{dz}{dx}\,.$$

È chiaro che le parentesi *possono* essere omesse, ed in effetti frequentemente si omettono, purchè ci sentiamo sicuri di rammentarci le condizioni che esse debbono esprimere. Il *principiante* farà bene di adoperarle, benchè a misura che egli si avanzi nel soggetto possa dispensarsene.

171. Es.
$$u=z^2+y^3+zy\,,$$
$$z=\operatorname{sen}x\,,$$
$$y=e^x\,,$$
$$\left(\frac{du}{dy}\right)=3y^2+z\,,$$
$$\left(\frac{du}{dz}\right)=2z+y\,,$$
$$\frac{dy}{dx}=e^x\,,$$
$$\frac{dz}{dx}=\cos x\,;$$

onde
$$\begin{aligned}\frac{du}{dx}&=(3y^2+z)\,e^x+(2z+y)\cos x\\&=(3e^{2x}+\operatorname{sen}x)\,e^x+(2\operatorname{sen}x+e^x)\cos x\\&=3e^{3x}+e^x(\operatorname{sen}x+\cos x)+\operatorname{sen}2x\,,\end{aligned}$$

e questo valore è naturalmente quello stesso che si ottiene se sostituiamo in u per y e z i loro valori espressi in x, il che dà $u=e^{3x}+e^x\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}^2x$, e quindi differenziamo rispetto ad x.

172. Un caso importante della proposizione generale si ottiene supponendo $z=x$ sicchè $\frac{dz}{dx}=1$. Abbiamo allora

$$\frac{du}{dx}=\left(\frac{du}{dy}\right)\frac{dy}{dx}+\left(\frac{du}{dx}\right)\,.$$

Quì non possiamo dispensarci dalle parentesi o da altra equivalente notazione, $\left(\frac{du}{dx}\right)$ dinotando quale *sarebbe* il coefficiente differenziale di u rispetto ad x, se y non fosse una funzione di x, e $\frac{du}{dx}$ dinotando l'attuale coefficiente differenziale di u rispetto ad x, quando y *è* una funzione di x.

173. Es.

$$u = \tan^{-1}(xy),$$

$$y = e^x,$$

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = \frac{y}{1 + x^2 y^2},$$

$$\left(\frac{du}{dy}\right) = \frac{x}{1 + x^2 y^2},$$

$$\frac{dy}{dx} = e^x;$$

onde

$$\frac{du}{dx} = \frac{e^x x + y}{1 + x^2 y^2}$$

$$= \frac{e^x (1 + x)}{1 + x^2 e^{2x}},$$

il che naturalmente è ciò che si ottiene se differenziamo $\tan^{-1}(xe^x)$ rispetto ad x.

174. Si supponga $u = \varphi(v, y, z)$ in cui v, y, z, sono funzioni di x. Abbiamo, come sopra,

$$\Delta u = \varphi(v + \Delta v, y + \Delta y, z + \Delta z) - \varphi(v, y, z)$$

$$= \varphi(v + \Delta v, y + \Delta y, z + \Delta z) - \varphi(v, y + \Delta y, z + \Delta z)$$

$$+ \varphi(v, y + \Delta y, z + \Delta z) - \varphi(v, y, z + \Delta z)$$

$$+ \varphi(v, y, z + \Delta z) - \varphi(v, y, z);$$

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{\varphi(v + \Delta v, y + \Delta y, z + \Delta z) - \varphi(v, y + \Delta y, z + \Delta z)}{\Delta v} \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

$$+ \frac{\varphi(v, y + \Delta y, z + \Delta z) - \varphi(v, y, z + \Delta z)}{\Delta y} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$+ \frac{\varphi(v, y, z + \Delta z) - \varphi(v, y, z)}{\Delta z} \frac{\Delta z}{\Delta x}.$$

Procedendo al limite, otteniamo

$$\frac{du}{dx}=\left(\frac{du}{dv}\right)\frac{dv}{dx}+\left(\frac{du}{dy}\right)\frac{dy}{dx}+\left(\frac{du}{dz}\right)\frac{dz}{dx}.$$

Il procedimento può essere esteso al caso nel quale u racchiude più di tre funzioni di x.

175. Esempii possono incontrarsi più complicati in apparenza, ma che essenzialmente si riferiscono ai principii stessi degli articoli precedenti. Si supponga per esempio

$$u=\varphi\,(v,y,z,x),$$
$$v=\psi\,(y,z,x),$$
$$y=f(x),$$
$$z=F(x),$$

così che, eseguendo le sostituzioni, u potrebbe rendersi una funzione esplicita di x; si voglia esprimere il coefficiente differenziale di u rispetto ad x, senza fare queste sostituzioni.

$$\frac{du}{dx}=\left(\frac{du}{dv}\right)\frac{dv}{dx}+\left(\frac{du}{dy}\right)\frac{dy}{dx}+\left(\frac{du}{dz}\right)\frac{dz}{dx}+\left(\frac{du}{dx}\right),$$

$$\frac{dv}{dx}=\left(\frac{dv}{dy}\right)\frac{dy}{dx}+\left(\frac{dv}{dz}\right)\frac{dz}{dx}+\left(\frac{dv}{dx}\right),$$

$$\frac{dy}{dx}=f'(x),\quad \frac{dz}{dx}=F'(x).$$

Quindi $$\frac{du}{dx}=\left(\frac{du}{dv}\right)\left\{\left(\frac{dv}{dy}\right)f'(x)+\left(\frac{dv}{dz}\right)F'(x)+\left(\frac{dv}{dx}\right)\right\}$$
$$+\left(\frac{du}{dy}\right)f'(x)+\left(\frac{du}{dz}\right)F'(x)+\left(\frac{du}{dx}\right).$$

176. Fatte le stesse sostituzioni come nell' Art. 169, si cerca di esprimere $\frac{d^2u}{dx^2}$. Abbiamo

$$\frac{du}{dx}=\left(\frac{du}{dy}\right)\frac{dy}{dx}+\left(\frac{du}{dz}\right)\frac{dz}{dx}.$$

Ora $\left(\frac{du}{dy}\right)$ è esso stesso una funzione di y e z. Se la dinotiamo con v il suo coefficiente differenziale rispetto ad x sarà

$$\left(\frac{dv}{dy}\right)\frac{dy}{dx}+\left(\frac{dv}{dz}\right)\frac{dz}{dx},$$

che può essere scritto

$$\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)\frac{dy}{dx}+\left(\frac{d^2u}{dz\,dy}\right)\frac{dz}{dx}.$$

Il coefficiente differenziale di $\frac{dy}{dx}$ rispetto ad x è $\frac{d^2y}{dx^2}$. Procedendo nello stesso modo col fattore

$$\left(\frac{du}{dz}\right)\frac{dz}{dx},$$

e ricordandosi, (Art. 134), che

$$\left(\frac{d^2u}{dz\,dy}\right)=\left(\frac{d^2u}{dy\,dz}\right),$$

abbiamo

$$\frac{d^2u}{dx^2}=\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+2\left(\frac{d^2u}{dy\,dz}\right)\frac{dy}{dx}\frac{dz}{dx}+\left(\frac{d^2u}{dz^2}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right)^2$$
$$+\left(\frac{du}{dy}\right)\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{du}{dz}\right)\frac{d^2z}{dx^2}.$$

Se $z=x$, abbiamo $\frac{dz}{dx}=1, \frac{d^2z}{dx^2}=0$; così

$$\frac{d^2u}{dx^2}=\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+2\left(\frac{d^2u}{dy\,dx}\right)\frac{dy}{dx}+\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)+\left(\frac{du}{dy}\right)\frac{d^2y}{dx^2}.$$

177. Finora in questo capitolo abbiamo dato metodi i quali, benchè spesso convenienti, non sono assolutamente *necessarî*, poichè in tutt' i casi, effettuando le richieste sostituzioni, possiamo ottenere una funzione esplicita di x, e differenziarla con le regole conosciute. Ma il caso che ora consideriamo è uno nel quale un nuovo metodo è spesso *indispensabile*.

Sia $\varphi(x, y)=0$ un' equazione che lega le variabili x ed y; si cerca di trovare $\frac{dy}{dx}$. Se la data equazione può risolversi

in modo da dare y espresso in x, vale a dire $y = \psi(x)$, allora il coefficiente differenziale di y rispetto ad x può trovarsi con le regole precedenti. Se x può essere espresso per mezzo di y, possiamo determinare $\frac{dx}{dy}$ e quindi $\frac{dy}{dx}$, essendo $\frac{dx}{dy} \times \frac{dy}{dx} = 1$. Ma siccome è spesso difficile, ed alle volte impossibile, di risolvere la data equazione, è necessario d'investigare una regola per trovare $\frac{dy}{dx}$ che non richieda questa operazione.

Si ponga u per $\varphi(x, y)$. Per l'equazione data y è *una certa* funzione definita di x; quindi

$$\left(\frac{du}{dy}\right) \frac{dy}{dx} + \left(\frac{du}{dx}\right)$$

è, per l'Art. 172, il coefficiente differenziale di u rispetto ad x. Ma u è sempre zero, e per conseguenza è anche tale il suo coefficiente differenziale rispetto ad x. Quindi

$$0 = \left(\frac{du}{dy}\right) \frac{dy}{dx} + \left(\frac{du}{dx}\right),$$

onde

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\left(\frac{du}{dx}\right)}{\left(\frac{du}{dy}\right)}.$$

178. Questo risultato importante può ottenersi anche nel seguente modo, che nel fatto riunisce in un articolo porzioni delle pagine precedenti. Sia

$$\varphi(x, y) = 0.$$

Si supponga x diventare $x + \Delta x$ ed y diventare $y + \Delta y$, sicchè

$$\varphi(x + \Delta x, y + \Delta y) = 0.$$

Quindi $$\varphi(x + \Delta x, y + \Delta y) - \varphi(x, y) = 0,$$

e $$\varphi(x + \Delta x, y + \Delta y) - \varphi(x + \Delta x, y) + \varphi(x + \Delta x, y) - \varphi(x, y) = 0.$$

Si divida per Δx, ed abbiamo

$$\frac{\varphi(x + \Delta x, y + \Delta y) - \varphi(x + \Delta x, y)}{\Delta y} \frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{\varphi(x + \Delta x, y) - \varphi(x, y)}{\Delta x} = 0.$$

Questa equazione, essendo sempre vera, rimane tale quando Δx e Δy diminuiscono indefinitamente.

Il limite di $\frac{\varphi(x+\Delta x, y) - \varphi(x, y)}{\Delta x}$, quando Δx diminuisce, è il coefficiente differenziale di $\varphi(x, y)$ *rispetto ad* x, *formato nella supposizione che varii solamente* x, e se poniamo u per $\varphi(x, y)$, questo limite può essere dinotato con $\left(\frac{du}{dx}\right)$.

Il limite di $\frac{\varphi(x+\Delta x, y+\Delta y) - \varphi(x+\Delta x, y)}{\Delta y}$, se Δx rimanesse costante, sarebbe il coefficiente differenziale di $\varphi(x+\Delta x, y)$ *formato nella supposizione che varii solamente* y. Ma siccome Δx diminuisce senza limite insieme a Δy, il limite è il coefficiente differenziale di u rispetto ad y, formato nella supposizione che varii solamente y. Esso può essere dinotato con $\left(\frac{du}{dy}\right)$.

Il limite di $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ è $\frac{dy}{dx}$. Quindi finalmente

$$\left(\frac{du}{dy}\right)\frac{dy}{dx} + \left(\frac{du}{dx}\right) = 0.$$

179. Es. Si supponga

$$a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2 = 0.$$

Qui
$$u = a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2,$$
$$\left(\frac{du}{dx}\right) = 2b^2x,$$
$$\left(\frac{du}{dy}\right) = 2a^2y;$$

onde
$$a^2y\frac{dy}{dx} + b^2x = 0,$$

quindi
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Poichè $y = \frac{b}{a}\sqrt{(a^2 - x^2)}$ dalla data equazione, otteniamo direttamente
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{bx}{a\sqrt{(a^2 - x^2)}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Se in (1) si sostituisce il valore di y espresso in x, il risultato coincide con (2).

In questo caso possiamo verificare la nostra nuova regola, paragonando i suoi risultati con quelli trovati precedentemente. In esempii più complicati, come

$$x^5 - ax^3y + bx^2y^2 - y^5 = 0,$$

possiamo trovare $\frac{dy}{dx}$ solamente col nuovo metodo;

ponendo u per $x^5 - ax^3y + bx^2y^2 - y^5$, abbiamo

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = 5x^4 - 3ax^2y + 2bxy^2,$$

$$\left(\frac{du}{dy}\right) = -ax^3 + 2bx^2y - 5y^4;$$

quindi

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5x^4 - 3ax^2y + 2bxy^2}{5y^4 - 2bx^2y + ax^3}.$$

180. Investigheremo ora il *secondo* coefficiente differenziale di una funzione implicita.

Dall'equazione

$$u \text{ o } \varphi(x, y) = 0,$$

abbiamo dedotto

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\left(\frac{du}{dx}\right)}{\left(\frac{du}{dy}\right)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1);$$

si cerca di trovare $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Osserviamo che $\left(\frac{du}{dx}\right)$ essendo una funzione di x e di y, il suo coefficiente differenziale rispetto ad x può essere trovato con l'Art. 172. Se poniamo v per $\left(\frac{du}{dx}\right)$, il richiesto coefficiente differenziale sarà

$$\left(\frac{dv}{dy}\right)\frac{dy}{dx} + \left(\frac{dv}{dx}\right).$$

Similmente, dinotando $\left(\frac{du}{dy}\right)$ con w, abbiamo per il suo coefficiente differenziale rispetto ad x,

$$\left(\frac{dw}{dy}\right)\frac{dy}{dx} + \left(\frac{dw}{dx}\right).$$

Quindi, da (1)

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{w\left\{\left(\frac{dv}{dy}\right)\frac{dy}{dx} + \left(\frac{dv}{dx}\right)\right\} - v\left\{\left(\frac{dw}{dy}\right)\frac{dy}{dx} + \left(\frac{dw}{dx}\right)\right\}}{w^2} \text{ ...... } (2).$$

Ora $$\left(\frac{dv}{dx}\right) = \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right),$$

l'ultimo simbolo dinotando che v si deve differenziare due volte rispetto ad x, *nella supposizione che varii solamente* x; inoltre

$$\left(\frac{dv}{dy}\right) = \left(\frac{d^2u}{dy\,dx}\right),$$

l'ultimo simbolo dinotando che u si deve differenziaro rispetto ad x, supponendo *variare solamente* x, ed il risultato rispetto ad y, supponendo variare solamente y. Similmente

$$\left(\frac{dw}{dx}\right) = \left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right),$$

$$\left(\frac{dw}{dy}\right) = \left(\frac{d^2u}{dy^2}\right).$$

Quindi, sostituendo in (2), abbiamo

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\left(\frac{du}{dy}\right)\left\{\left(\frac{d^2u}{dy\,dx}\right)\frac{dy}{dx} + \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)\right\} - \left(\frac{du}{dx}\right)\left\{\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)\frac{dy}{dx} + \left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)\right\}}{\left(\frac{du}{dy}\right)^2}$$

$$\text{................} (3).$$

Se sostituiamo in (3) il valore di $\frac{dy}{dx}$ dato da (1), abbiamo,

poichè $\left(\frac{d^2u}{dy\,dx}\right) = \left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)$ per l'Art. 134,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)\left(\frac{du}{dy}\right)^2 - 2\left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)\left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{du}{dy}\right) + \left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)\left(\frac{du}{dx}\right)^2}{\left(\frac{du}{dy}\right)^3}$$

$$\text{................} (4).$$

181. Questo risultato può essere anche trovato con l'Art. 176, supponendo sempre $u=0$, e quindi $\frac{d^2u}{dx^2}=0$; o indipendentemente nel modo seguente.

Da $$u=0$$

segue che $$\left(\frac{du}{dy}\right)\frac{dy}{dx}+\left(\frac{du}{dx}\right)=0 \ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Si dinoti questo risultato per brevità con

$$v=0.$$

Quindi $$\left(\frac{dv}{dy}\right)\frac{dy}{dx}+\left(\frac{dv}{dx}\right)=0 \ldots\ldots\ldots\ldots (2),$$

il quale risultato, espresso per mezzo di u, è

$$\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)+2\left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)\frac{dy}{dx}+\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{du}{dy}\right)\frac{d^2y}{dx^2}=0 \ldots (3);$$

siccome $\frac{dy}{dx}$ è già conosciuto, questa equazione darà $\frac{d^2y}{dx^2}$.

L'equazione (1) è chiamata frequentemente « la prima equazione derivata, » o « l'equazione differenziale del primo ordine; » e l'equazione (3) è chiamata « la seconda equazione derivata, » o l'equazione differenziale del secondo ordine; » l'equazione $u=0$ essendo chiamata « l'equazione primitiva ».

182. Se il lettore riuscisse a dedurre correttamente da sè stesso l'importante equazione (3) dell'ultimo articolo, egli potrebbe omettere i due articoli seguenti, non essendo necessario di dirigere la sua attenzione sulle difficoltà che egli *avrebbe potuto* incontrare, o sugli errori che *avrebbe potuto* commettere. Però se egli ha sbagliato nei suoi tentativi, potrà paragonare il suo procedimento col seguente.

In (1), si ponga p per $\frac{dy}{dx}$, sicchè v stia per

$$\left(\frac{du}{dy}\right)p+\left(\frac{du}{dx}\right).$$

Da ciò $$\left(\frac{dv}{dx}\right)=\left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)p+\left(\frac{du}{dy}\right)\left(\frac{dp}{dx}\right)+\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right),$$

$$\left(\frac{dv}{dy}\right)=\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)p+\left(\frac{du}{dy}\right)\left(\frac{dp}{dy}\right)+\left(\frac{d^2u}{dy\,dx}\right).$$

Così (2) diviene

$$\left\{\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)p+\left(\frac{du}{dy}\right)\left(\frac{dp}{dy}\right)+\left(\frac{d^2u}{dy\,dx}\right)\right\}p$$
$$+\left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)p+\left(\frac{du}{dy}\right)\left(\frac{dp}{dx}\right)+\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)=0,$$

o

$$\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)+2\left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)p+\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)p^2+\left(\frac{du}{dy}\right)\left\{\left(\frac{dp}{dy}\right)p+\left(\frac{dp}{dx}\right)\right\}=0,$$

Ma $\left(\frac{dp}{dy}\right)p+\left(\frac{dp}{dx}\right)=\frac{dp}{dx}$, cioè $\frac{d^2y}{dx^2}$, (Art. 172), e con questa semplificazione otteniamo il risultato richiesto.

Un errore molto comune si è di omettere le parentesi in $\left(\frac{dp}{dy}\right)p+\left(\frac{dp}{dx}\right)$, e così $\left(\frac{dp}{dx}\right)$ è scritto $\frac{d^2y}{dx^2}$, e vi rimane un termine superfluo, cioè $\frac{dp}{dy}$, o como forse è stato scritto dallo studente, $\frac{d^2y}{dy\,dx}$.

183. Nell'Art. 182 procedemmo strettamente secondo quanto esigeva letteralmente la regola racchiusa nell'equazione (2) dell'Art. 181. Avremmo potuto ragionare nel seguente modo.

Si tratta semplicemente di esprimere simbolicamente il fatto, che il coefficiente differenziale di

$$\left(\frac{du}{dy}\right)\frac{dy}{dx}+\left(\frac{du}{dx}\right)$$

rispetto ad x è zero.

Ora il coefficiente differenziale di $\left(\frac{du}{dy}\right)$ rispetto ad x, è

$$\left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)+\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)\frac{dy}{dx};$$

ed il coefficiente differenziale di $\frac{dy}{dx}$ rispetto ad x è $\frac{d^2y}{dx^2}$:

Quindi il coefficiente differenziale di $\left(\frac{du}{dy}\right)\frac{dy}{dx}$ è

$$\left\{\left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)+\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)\frac{dy}{dx}\right\}\frac{dy}{dx}+\left(\frac{du}{dy}\right)\frac{d^2y}{dx^2}\;\ldots\ldots(1).$$

D'altronde il coefficiente differenziale di $\left(\frac{du}{dx}\right)$ è

$$\left(\frac{d^2u}{dy\,dx}\right)\frac{dy}{dx}+\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2).$$

Riunendo i termini in (1) e (2), abbiamo

$$\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)+2\left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)\frac{dy}{dx}+\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{du}{dy}\right)\frac{d^2y}{dx^2}=0.$$

184. Non è necessario di procedere oltre con i coefficienti differenziali successivi delle funzioni implicite, poichè le equazioni diventano troppo complicate per essere spesso usate. Il lettore, come un esercizio, può ottenere il risultato seguente dall'equazione (3) dell'Art. 181, per mezzo di uno dei metodi usati negli Art. 182 e 183:

$$\left(\frac{d^3u}{dx^3}\right)+3\left(\frac{d^3u}{dx^2dy}\right)\frac{dy}{dx}+3\left(\frac{d^3u}{dx\,dy^2}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{d^3u}{dy^3}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)^3$$
$$+3\left\{\left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)+\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)\frac{dy}{dx}\right\}\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{du}{dy}\right)\frac{d^3y}{dx^3}=0.$$

Possiamo osservare che spesso si è trovato utile di usare una certa notazione abbreviata per i coefficienti differenziali parziali. Così se $\varphi(x,y)$ è una funzione qualunque di x ed y, ogni coefficiente differenziale parziale della funzione può essere indicato dalla lettera φ, con accenti *superiori* corrispondenti al numero delle differenziazioni rispetto ad x, e con accenti *inferiori* corrispondenti al numero delle differenziazioni rispetto ad y. Per esempio, φ'' indicherà $\left(\frac{d^2\varphi(x,y)}{dx^2}\right)$, e $\varphi'_{\prime}$ indicherà $\left(\frac{d^2\varphi(x,y)}{dx\,dy}\right)$, e così di seguito.

Possiamo anche usare y' per $\frac{dy}{dx}$, ed y'' per $\frac{d^2y}{dx^2}$, e così di seguito. In tal modo con questa notazione le equazioni (I)

e (3) dell'Art. 181, e l'equazione che si può ottenere da (3) saranno espresse rispettivamente come segue:

$$\varphi' + \varphi_{,}y' = 0,$$

$$\varphi'' + 2\varphi_{,}'y' + \varphi_{,,}y'^2 + \varphi_{,}y'' = 0,$$

$$\varphi''' + 3\varphi_{,}''y' + 3\varphi_{,,}'y'^2 + \varphi_{,,,}y'^3 + 3(\varphi_{,}' + \varphi_{,,}y')\,y'' + \varphi_{,}y''' = 0.$$

185. Si suppongano le due equazioni

$$f(x, y, z) = 0,$$

$$F(x, y, z) = 0,$$

esistere ***simultaneamente***, nelle quali x è la variabile indipendente ed y e z sono variabili dipendenti. Dalle due date equazioni possiamo eliminare z, e così trovare un'equazione tra y ed x. Quindi $\frac{dy}{dx}$ può essere determinato. Similmente, dalle due date equazioni possiamo eliminare y, e così trovare una relazione tra z ed x, onde $\frac{dz}{dx}$ può essere determinato. Nei casi in cui l'eliminazione è noiosa o impraticabile possiamo procedere nel seguente modo.

Si dinoti $f(x, y, z)$ con u ed $F(x, y, z)$ con v. Poichè y e z sono funzioni di x, il coefficiente differenziale di u rispetto ad x è, per gli Art. 172 e 174,

$$\left(\frac{du}{dx}\right) + \left(\frac{du}{dy}\right)\frac{dy}{dx} + \left(\frac{du}{dz}\right)\frac{dz}{dx};$$

e poichè u è sempre $= 0$, abbiamo

$$0 = \left(\frac{du}{dx}\right) + \left(\frac{du}{dy}\right)\frac{dy}{dx} + \left(\frac{du}{dz}\right)\frac{dz}{dx} \ldots\ldots (1).$$

Similmente, $0 = \left(\frac{dv}{dx}\right) + \left(\frac{dv}{dy}\right)\frac{dy}{dx} + \left(\frac{dv}{dz}\right)\frac{dz}{dx} \ldots\ldots (2)$;

dalle quali troviamo

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{dv}{dz}\right) - \left(\frac{dv}{dx}\right)\left(\frac{du}{dz}\right)}{\left(\frac{du}{dy}\right)\left(\frac{dv}{dz}\right) - \left(\frac{dv}{dy}\right)\left(\frac{du}{dz}\right)} \ldots\ldots (3),$$

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{\left(\frac{dv}{dx}\right)\left(\frac{du}{dy}\right) - \left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{dv}{dy}\right)}{\left(\frac{dv}{dz}\right)\left(\frac{du}{dy}\right) - \left(\frac{du}{dz}\right)\left(\frac{dv}{dy}\right)} \dots\dots\dots (4).$$

186. Differenziando le equazioni (1), (2) dell'ultimo articolo rispetto ad x, otteniamo

$$\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right) + 2\left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)\frac{dy}{dx} + 2\left(\frac{d^2u}{dx\,dz}\right)\frac{dz}{dx} + \left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

$$+ 2\left(\frac{d^2u}{dy\,dz}\right)\frac{dy}{dx}\frac{dz}{dx} + \left(\frac{d^2u}{dz^2}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{du}{dy}\right)\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{du}{dz}\right)\frac{d^2z}{dx^2} = 0,$$

$$\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right) + 2\left(\frac{d^2v}{dx\,dy}\right)\frac{dy}{dx} + 2\left(\frac{d^2v}{dx\,dz}\right)\frac{dz}{dx} + \left(\frac{d^2v}{dy^2}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

$$+ 2\left(\frac{d^2v}{dy\,dz}\right)\frac{dy}{dx}\frac{dz}{dx} + \left(\frac{d^2v}{dz^2}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dy}\right)\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dv}{dz}\right)\frac{d^2z}{dx^2} = 0.$$

Da queste equazioni possiamo dedurre $\frac{d^2y}{dx^2}$ e $\frac{d^2z}{dx^2}$, che possono anche trovarsi differenziando le equazioni (3) e (4) dell'articolo precedente.

187. Supponiamo di avere n equazioni tra $n+1$ variabili $x, y, z, \dots\dots t$. Siano le equazioni

$$F_1(x, y, z, \dots\dots t) = 0, \quad \text{o } u_1 = 0,$$

$$F_2(x, y, z, \dots\dots t) = 0, \quad \text{o } u_2 = 0,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$F_n(x, y, z, \dots\dots t) = 0, \quad \text{o } u_n = 0.$$

Per queste equazioni tutte le variabili eccetto una possono considerarsi funzioni di quest'una. Se x sia la variabile indipendente, abbiamo

$$0 = \left(\frac{du_1}{dx}\right) + \left(\frac{du_1}{dy}\right)\frac{dy}{dx} + \left(\frac{du_1}{dz}\right)\frac{dz}{dx} + \dots\dots + \left(\frac{du_1}{dt}\right)\frac{dt}{dx},$$

$$0 = \left(\frac{du_2}{dx}\right) + \left(\frac{du_2}{dy}\right)\frac{dy}{dx} + \left(\frac{du_2}{dz}\right)\frac{dz}{dx} + \dots\dots + \left(\frac{du_2}{dt}\right)\frac{dt}{dx},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$0 = \left(\frac{du_n}{dx}\right) + \left(\frac{du_n}{dy}\right)\frac{dy}{dx} + + \ldots\ldots\ldots \left(\frac{du_n}{dt}\right)\frac{dt}{dx};$$

dalle quali n equazioni possiamo determinare le n quantità

$$\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}, \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{dt}{dx}.$$

188. Si supponga $\varphi(x, y, z) = 0$ essere la sola equazione che lega tre variabili, sicchè z possa essere considerata una funzione implicita delle due variabili indipendenti x ed y; si cerca di trovare $\frac{dz}{dx}$ e $\frac{dz}{dy}$.

Con $\frac{dz}{dx}$ s'intende il coefficiente differenziale di z rispetto ad x, supponendo y costante, e con $\frac{dz}{dy}$ il coefficiente differenziale di z rispetto ad y supponendo x costante. Teoreticamente possiamo per mezzo della data equazione trovare il valore di z espresso con x ed y e quindi effettuare la differenziazione con le regole comuni; (si vegga l'Art. 131). Ma per evitare la difficoltà di risolvere l'equazione data adottiamo un altro metodo. Si supponga y costante così che abbiamo due variabili x e z, e si ponga u per $\varphi(x, y, z)$, allora per l'Art. 178

$$\left(\frac{du}{dx}\right) + \left(\frac{du}{dz}\right)\frac{dz}{dx} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (1);$$

in cui $\left(\frac{du}{dx}\right)$ sta per il coefficiente differenziale di u preso nella supposizione che varii solamente x, e $\left(\frac{du}{dz}\right)$ per il coefficiente differenziale di u preso nella supposizione che varii solamente z. Similmente

$$\left(\frac{du}{dy}\right) + \left(\frac{du}{dz}\right)\frac{dz}{dy} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Le equazioni (1) e (2) determinano $\frac{dz}{dx}$ e $\frac{dz}{dy}$.

Possiamo determinare $\frac{d^2z}{dx^2}$ e $\frac{d^2z}{dy^2}$ col metodo dell'Art. 180,

o con quello dell'Art. 181. Se adottiamo l'ultimo, le due equazioni che otteniamo sono

$$\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right) + 2\left(\frac{d^2u}{dx\,dz}\right)\frac{dz}{dx} + \left(\frac{d^2u}{dz^2}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{du}{dz}\right)\frac{d^2z}{dx^2} = 0,$$

$$\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right) + 2\left(\frac{d^2u}{dy\,dz}\right)\frac{dz}{dy} + \left(\frac{d^2u}{dz^2}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + \left(\frac{du}{dz}\right)\frac{d^2z}{dy^2} = 0.$$

Possiamo ottenere un'equazione per trovare $\frac{d^2z}{dy\,dx}$ differenziando (1) rispetto a y, o (2) rispetto ad x. Deduciamo così

$$\left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right) + \left(\frac{d^2u}{dz\,dx}\right)\frac{dz}{dy} + \left(\frac{d^2u}{dz\,dy}\right)\frac{dz}{dx} + \left(\frac{d^2u}{dz^2}\right)\frac{dz}{dy}\frac{dz}{dx} + \left(\frac{du}{dz}\right)\frac{d^2z}{dy\,dx} = 0.$$

189. Supponiamo di avere due equazioni che legano quattro variabili; per esempio,

$$f(v, x, y, z) = 0, \quad \text{o } u_1 = 0,$$
$$F(v, x, y, z) = 0, \quad \text{o } u_2 = 0;$$

per queste equazioni v e z possono essere considerate funzioni delle variabili indipendenti x ed y. Se eliminiamo v otteniamo un'equazione tra z, x, ed y, sicchè $\frac{dz}{dx}$ e $\frac{dz}{dy}$ possono essere ottenuti per mezzo dell'articolo precedente; e similmente se eliminiamo z possiamo trovare $\frac{dv}{dx}$ e $\frac{dv}{dy}$. O pure possiamo procedere così: da $u_1 = 0$ deduciamo, per l'Art. 174,

$$\left(\frac{du_1}{dx}\right) + \left(\frac{du_1}{dv}\right)\frac{dv}{dx} + \left(\frac{du_1}{dz}\right)\frac{dz}{dx} = 0,$$

e da $u_2 = 0$ abbiamo

$$\left(\frac{du_2}{dx}\right) + \left(\frac{du_2}{dv}\right)\frac{dv}{dx} + \left(\frac{du_2}{dz}\right)\frac{dz}{dx} = 0,$$

dalle quali possono ricavarsi $\frac{dv}{dx}$ e $\frac{dz}{dx}$.

Similmente, da $u_1 = 0$ ed $u_2 = 0$ deduciamo

$$\left(\frac{du_1}{dy}\right) + \left(\frac{du_1}{dv}\right)\frac{dv}{dy} + \left(\frac{du_1}{dz}\right)\frac{dz}{dy} = 0,$$

e
$$\left(\frac{du_2}{dy}\right) + \left(\frac{du_2}{dv}\right)\frac{dv}{dy} + \left(\frac{du_2}{dz}\right)\frac{dz}{dy} = 0,$$

dalle quali possono trovarsi $\frac{dz}{dy}$ e $\frac{dv}{dy}$.

Nelle equazioni come quelle del presente articolo è molto comune di scrivere $\frac{df}{dy}$, $\frac{df}{dv}$, $\frac{dF}{dy}$, etc., per dinotare $\frac{du_1}{dy}$, $\frac{du_1}{dv}$, $\frac{du_2}{dy}$, etc.

190. Se i valori di x ed y che soddisfano un'equazione $u=0$ tra x ed y, annullano inoltre $\left(\frac{du}{dx}\right)$ e $\left(\frac{du}{dy}\right)$, $\frac{dy}{dx}$, che è

$$= -\frac{\left(\frac{du}{dx}\right)}{\left(\frac{du}{dy}\right)},$$

prende la forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Se applichiamo il metodo dell'Art. 145, abbiamo

$$\text{il limite di } \frac{\left(\frac{du}{dx}\right)}{\left(\frac{du}{dy}\right)} = \text{al limite di } \frac{\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right) + \left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)\frac{dy}{dx}}{\left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right) + \left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)\frac{dy}{dx}},$$

il numeratore ed il denominatore della seconda frazione essendo rispettivamente il coefficiente differenziale di $\left(\frac{du}{dx}\right)$ e di $\left(\frac{du}{dy}\right)$ rispetto ad x.

Abbiamo dunque

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right) + \left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)\frac{dy}{dx}}{\left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right) + \left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)\frac{dy}{dx}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

In questa espressione dobbiamo sostituire in $\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)$, $\left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)$, e $\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)$, i valori di x ed y che si considerano, e così otteniamo un'equazione di 2° grado per trovare $\frac{dy}{dx}$. Questa equazione quadratica è

$$\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+2\left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)\frac{dy}{dx}+\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)=0 \ldots\ldots (2);$$

l'equazione (2) si accorda con l'equazione (3) dell'Art. 181, ricordandosi che per ipotesi $\left(\frac{du}{dy}\right)=0$.

191. Se i valori di x ed y che si considerano, oltre di rendere $u=0$, $\left(\frac{du}{dx}\right)=0$, $\left(\frac{du}{dy}\right)=0$, rendono anche

$$\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)=0, \quad \left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)=0, \quad \left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)=0,$$

allora il valore di $\frac{dy}{dx}$ dato dall'equazione (1) dell'articolo precedente prende anche la forma $\frac{0}{0}$. Quindi, applicando di nuovo la regola per trovare il limite di una tale frazione, abbiamo

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\left(\frac{d^3u}{dx^3}\right)+2\left(\frac{d^3u}{dx^2dy}\right)\frac{dy}{dx}+\left(\frac{d^3u}{dxdy^2}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(\frac{d^3u}{dx^2dy}\right)+2\left(\frac{d^3u}{dxdy^2}\right)\frac{dy}{dx}+\left(\frac{d^3u}{dy^3}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)\frac{d^2y}{dx^2}}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Poichè $\left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)$ e $\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)$ svaniscono, otteniamo da (1)

$$\left(\frac{d^3u}{dy^3}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)^3+3\left(\frac{d^3u}{dxdy^2}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+3\left(\frac{d^3u}{dx^2dy}\right)\frac{dy}{dx}+\left(\frac{d^3u}{dx^3}\right)=0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2),$$

in cui in tutt'i coefficienti differenziali di u dobbiamo sostituire i valori di x ed y che si considerano, dando una equazione cubica per determinare $\frac{dy}{dx}$. Si paragoni con l'Art. 184.

Si deve osservare che questo metodo è soggetto ad un'obiezione. Noi *supponiamo* che $\left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)\frac{d^2y}{dx^2}$ e $\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)\frac{d^2y}{dx^2}$ svaniscano perchè in ciascun caso un fattore svanisce; però se $\frac{d^2y}{dx^2}$ *fosse infinito*, non seguirebbe necessariamente l'annullarsi di $\left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)\frac{d^2y}{dx^2}$ e $\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)\frac{d^2y}{dx^2}$.

192. Es. $y^4 + 3a^2y^2 - 4a^2xy - a^2x^2 = 0$, o $u = 0$.

Qui $$\left(\frac{du}{dx}\right) = -4a^2y - 2a^2x,$$

$$\left(\frac{du}{dy}\right) = 4y^3 + 6a^2y - 4a^2x;$$

quindi $$\frac{dy}{dx} = \frac{4a^2y + 2a^2x}{4y^3 + 6a^2y - 4a^2x} = \frac{2a^2y + a^2x}{2y^3 + 3a^2y - 2a^2x}.$$

Qui $x = 0$, $y = 0$, verificano $u = 0$, e fanno prendere a $\frac{dy}{dx}$ la forma $\frac{0}{0}$.

Si differenziino il numeratore ed il denominatore, ed abbiamo

$$\frac{dy}{dx} = \text{al limite di } \frac{2a^2\frac{dy}{dx} + a^2}{(6y^2 + 3a^2)\frac{dy}{dx} - 2a^2}$$

$$= \frac{2\frac{dy}{dx} + 1}{3\frac{dy}{dx} - 2} \text{ ultimamente.}$$

Quindi, $$\frac{dy}{dx}\left(3\frac{dy}{dx} - 2\right) = 2\frac{dy}{dx} + 1;$$

onde $$3\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 4\frac{dy}{dx} - 1 = 0;$$

quindi $$\frac{dy}{dx} = \frac{2 \pm \sqrt{7}}{3}.$$

In secondo luogo, supponiamo essere la data equazione

$$ay^3 - bx^2y + x^4 = 0.$$

Allora
$$\left(\frac{du}{dx}\right) = 4x^3 - 2bxy,$$
$$\left(\frac{du}{dy}\right) = 3ay^2 - bx^2;$$

quindi
$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x^3 - 2bxy}{bx^2 - 3ay^2}.$$

Questo valore di $\frac{dy}{dx}$ prende la forma $\frac{0}{0}$ quando x ed y svaniscono. Quindi, differenziando il numeratore ed il denominatore, abbiamo

$$\frac{dy}{dx} = \frac{12x^2 - 2by - 2bx\frac{dy}{dx}}{2bx - 6ay\frac{dy}{dx}},$$

quando x ed y si fanno $= 0$.

Di nuovo, abbiamo la forma $\frac{0}{0}$. Quindi, differenziando di nuovo,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{24x - 4b\frac{dy}{dx} - 2bx\frac{d^2y}{dx^2}}{2b - 6a\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 6ay\frac{d^2y}{dx^2}},$$

x ed y essendo messi $= 0$. Così *supponendo* che $x\frac{d^2y}{dx^2}$ ed $y\frac{d^2y}{dx^2}$ svaniscano, abbiamo

$$\frac{dy}{dx}\left\{2b - 6a\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\} = -4b\frac{dy}{dx},$$

da cui
$$\frac{dy}{dx} = 0,$$

o pure
$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{\frac{b}{3a}}.$$

193. Si può notare che l'equazione (2) dell'Art. 190 differisce dall'equazione (3) dell'Art. 181 solamente nella omis-

sione del termine $\left(\frac{du}{dy}\right)\frac{d^2y}{dx^2}$. Questo termine non si troverebbe se $\frac{dy}{dx}$ fosse una quantità costante, poichè allora $\frac{d^2y}{dx^2}$ sarebbe zero. Quindi l'equazione (2) dell'Art. 190 *può* essere dedotta differenziando l'equazione

$$\left(\frac{du}{dx}\right)+\left(\frac{du}{dy}\right)\frac{dy}{dx}=0,$$

rispetto ad x *e trattando* $\frac{dy}{dx}$ *come se fosse una costante.*

Similmente, l'equazione (2) dell'Art. 191 *può* essere dedotta dall'equazione (2) dell'Art. 190 differenziando rispetto ad x *e trattando* $\frac{dy}{dx}$ *come se fosse una costante.*

194. Se nell'equazione (2) dell'Art. 190 si ha $\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)=0$, avremo

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)}{2\left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)}$$

per *uno* dei valori di $\frac{dy}{dx}$. L'altro valore di $\frac{dy}{dx}$ sarà infinito, poichè conosciamo dall'Algebra che se in un'equazione quadratica il coefficiente della più alta potenza dell'incognita diminuisce gradatamente senza limite, una delle radici simultaneamente cresce senza limite.

195. Il valore di $\frac{dy}{dx}$, quando i valori $x=0$, $y=0$, gli fanno prendere una forma indeterminata, spesso può essere trovato più semplicemente come segue. Basta cercare il limite di $\frac{y}{x}$ a misura che x ed y diminuiscono senza limite; ciò è ovvio pel significato di $\frac{dy}{dx}$; si vedrà ancora ciò, se ci riferiamo all'illustrazione geometrica dell'Art. 38.

Es. $\quad y^4+3a^2y^2-4a^2xy-a^2x^2=0.$

Onde, $$y^2\left(\frac{y}{x}\right)^2+3a^2\left(\frac{y}{x}\right)^2-4a^2\frac{y}{x}-a^2=0.$$

Se ora $\frac{y}{x}$ ha un limite *finito*, il termine $y^2\left(\frac{y}{x}\right)^2$ svanirà per $y=0$, ed abbiamo per trovare il valore finale di $\frac{y}{x}$ l'equazione

$$3a^2\left(\frac{y}{x}\right)^2-4a^2\left(\frac{y}{x}\right)-a^2=0,$$

o $$3\left(\frac{y}{x}\right)^2-4\left(\frac{y}{x}\right)-1=0;$$

quindi $$\frac{y}{x}=\frac{2\pm\sqrt{7}}{3}.$$

Se $\frac{y}{x}$ ha un valore infinito, allora $\frac{x}{y}$ ha un valore zero: ponendo l'equazione data sotto la forma

$$y^2+3a^2-4a^2\frac{x}{y}-a^2\left(\frac{x}{y}\right)^2=0,$$

vediamo che $\frac{x}{y}=0$ *non* la soddisfarebbe nel limite. Quindi $\frac{y}{x}$ non ha un valore infinito.

In secondo luogo, sia

$$ay^3-bx^2y+x^4=0;$$

onde $$a\left(\frac{y}{x}\right)^3-b\left(\frac{y}{x}\right)+x=0:$$

quando x svanisce, abbiamo

$$\frac{y}{x}\left\{a\left(\frac{y}{x}\right)^2-b\right\}=0;$$

quindi $$\frac{y}{x}=0 \text{ ultimamente},$$

o pure $$\frac{y}{x}=\pm\sqrt{\frac{b}{a}}.$$

Ancora, si supponga

$$x^4+ax^2y+bxy^2-y^4=0;$$

onde $$x+a\frac{y}{x}+b\left(\frac{y}{x}\right)^2-y\left(\frac{y}{x}\right)^3=0.$$

I valori limiti *finiti* di $\frac{y}{x}$ sono dati da

$$a\left(\frac{y}{x}\right)+b\left(\frac{y}{x}\right)^2=0;$$

quindi $$\frac{y}{x}=0,$$

o pure $$\frac{y}{x}=-\frac{a}{b}.$$

E poichè l'equazione data può essere messa sotto la forma

$$x\left(\frac{x}{y}\right)^3+a\left(\frac{x}{y}\right)^2+b\left(\frac{x}{y}\right)-y=0,$$

vediamo che $\frac{x}{y}=0$ nel limite la soddisfa; quindi $\frac{y}{x}=\infty$ è nel limite un altro valore.

Adunque i limiti di $\frac{y}{x}$ sono

$$0,\ \text{o}\ -\frac{a}{b},\ \text{o}\ \infty.$$

Questo metodo è esente dalla difficoltà indicata in fine dell'Art. 191.

Se si volesse conoscere col metodo di questo articolo il valore di $\frac{dy}{dx}$ nel punto pel quale $x=a$, $y=b$, possiamo porre $a+x'$ per x e $b+y'$ per y nell'equazione che lega x ed y. Avremo allora da trovare il valore di $\frac{dy'}{dx'}$ quando $x'=0$ ed $y'=0$; e questo può farsi col metodo mostrato negli esempii precedenti.

ESEMPII.

1. Se $u=\sqrt{\left(\frac{z^2-y^2}{z^2+y^2}\right)}$, in cui z ed y sono funzioni di x, trovare $\frac{du}{dx}$.

2. Se $u = \text{sen}^{-1}\frac{z}{y}$, in cui z ed y sono funzioni di x, trovare $\frac{du}{dx}$.

3. Se $ye^{ny} = ax^m$, $\frac{dy}{dx} = \frac{my}{x(1+ny)}$.

4. Se $x^y - y^x = 0$, $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - xy\log y}{x^2 - xy\log x}$.

5. Se $(a+y)^2(b^2-y^2) + (x+a)^2 y^2 = 0$, trovare $\frac{dy}{dx}$.

6. Se $\text{sen}(xy) = mx$, trovare $\frac{dy}{dx}$.

7. Dato $y^3 + x^3 - 3axy = 0$, mostrare che $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2a^3xy}{(y^2-ax)^3}$.

8. Dato $x^4 + 2ax^2y = ay^3$, trovare $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{d^2y}{dx^2}$, e scrivere la terza equazione derivata.

9. Se $y = \varphi(x, y, u)$ e $\psi(x, y, u) = 0$, trovare $\frac{du}{dx}$.

$$Risultato\quad \frac{du}{dx} = -\frac{\frac{d\psi}{dx}\frac{d\varphi}{dy} - \frac{d\psi}{dy}\frac{d\varphi}{dx} - \frac{d\psi}{dx}}{\frac{d\psi}{du}\frac{d\varphi}{dy} - \frac{d\psi}{dy}\frac{d\varphi}{du} - \frac{d\psi}{du}}.$$

10. Se $u = \varphi(x, y)$, ed $u = \chi(x)$, trovare $\frac{du}{dy}$.

$$Risultato\quad \frac{du}{dy}\left\{\chi'(x) - \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)\right\} = \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)\chi'(x).$$

11. Se $u = a^{x^y} + \sqrt{(\sec xy)}$ trovare $\frac{du}{dx}$, (1) quando x ed y sono indipendenti, (2) quando $x + y = a$.

12. Se $a^{x^y} + \sqrt{(\sec xy)} = 0$, trovare $\frac{dy}{dx}$.

$$Risultato\quad \frac{dy}{dx} = -\frac{y\sqrt{(\sec xy)}\tan xy + 2a^{x^y}\, yx^{y-1}\log a}{x\sqrt{(\sec xy)}\tan xy + 2a^{x^y}\, x^y \log a \log x}.$$

13. Se $x^4+2ax^2y-ay^3=0$, mostrare che $\frac{dy}{dx}=0$, o $\pm\sqrt{2}$, quando $x=0$ ed $y=0$.

14. Se $x^4-ay^3+2axy^2+3ax^2y=0$, mostrare che $\frac{dy}{dx}=0$, o -1, o 3, quando $x=0$ ed $y=0$.

15. Se $ax^3+x^3y-ay^3=0$, mostrare che $\frac{dy}{dx}=1$, quando $x=0$ ed $y=0$.

16. Se $x^2y^2=(a^2-y^2)(b+y)^2$, mostrare che $\frac{dy}{dx}=\pm\frac{b}{\sqrt{(a^2-b^2)}}$, quando $x=0$ ed $y=-b$.

17. Se $(y^2-x^2)(x-1)\left(x-\frac{3}{2}\right)=2(y^2+x^2-2x)^2$,

trovare $\frac{dy}{dx}$ quando x ed y svaniscono, e quando $x=1$, $y=1$.

Risultati $\sqrt{\left(\frac{19}{3}\right)}$ e $\frac{-1\pm\sqrt{(33)}}{16}$.

18. Se $y^4-y^2+3xy-2x^2=0$, trovare $\frac{dy}{dx}$ quando $x=0$.

Risultato 1, 2, o $-\frac{3}{2}$.

19. Dato

$$u^2+x^2+y^2+z^2=c^2,$$

$$\log(xy)+\frac{y}{x}=a^2,$$

$$\log\left(\frac{z}{x}\right)+zx=b^2,$$

trovare $\frac{du}{dx}$.

Risultato $u\frac{du}{dx}=\frac{y^2}{x}\frac{x-y}{x+y}+\frac{z^2}{x}\frac{xz-1}{xz+1}-x.$

20. Se $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$; trovare

$$\frac{d^2z}{dx^2},\ \frac{d^2z}{dx\,dy},\ \text{e}\ \frac{d^2z}{dy^2}.$$

CAPITOLO XII.

CAMBIAMENTO DELLA VARIABILE INDIPENDENTE.

196. Nell' Art. 60 abbiamo dimostrato l'equazione

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}} \dots\dots\dots\dots (1),$$

e nell'Art. 63,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx} \dots\dots\dots\dots (2);$$

ed ora procediamo ad alcune estensioni di queste formole.

Date x ed y, tutte e due funzioni di una terza variabile z, si cerca di esprimere i coefficienti differenziali successivi di y rispetto ad x, per mezzo di quelli di y ed x rispetto a z.

Abbiamo $$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx} \text{ per } (2),$$

$$=\frac{\frac{dy}{dz}}{\frac{dx}{dz}} \quad \text{per } (1).$$

Quindi $$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\frac{\frac{dy}{dz}}{\frac{dx}{dz}}=\frac{d}{dz}\frac{\frac{dy}{dz}}{\frac{dx}{dz}}\cdot\frac{dz}{dx} \text{ per } (2),$$

$$=\frac{\frac{d^2y}{dz^2}\frac{dx}{dz}-\frac{d^2x}{dz^2}\frac{dy}{dz}}{\left(\frac{dx}{dz}\right)^2}\cdot\frac{dz}{dx}$$

$$=\frac{\frac{d^2y}{dz^2}\frac{dx}{dz}-\frac{d^2x}{dz^2}\frac{dy}{dz}}{\left(\frac{dx}{dz}\right)^3} \text{ per (1).}$$

In seguito, $\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d}{dz}\frac{\frac{d^2y}{dz^2}\frac{dx}{dz}-\frac{d^2x}{dz^2}\frac{dy}{dz}}{\left(\frac{dx}{dz}\right)^3}\cdot\frac{dz}{dx}$

$$=\frac{\left(\frac{d^3y}{dz^3}\frac{dx}{dz}-\frac{d^3x}{dz^3}\frac{dy}{dz}\right)\left(\frac{dx}{dz}\right)^3-3\left(\frac{dx}{dz}\right)^2\frac{d^2x}{dz^2}\left(\frac{d^2y}{dz^2}\frac{dx}{dz}-\frac{d^2x}{dz^2}\frac{dy}{dz}\right)}{\left(\frac{dx}{dz}\right)^6}\frac{dz}{dx}$$

$$=\frac{\left(\frac{d^3y}{dz^3}\frac{dx}{dz}-\frac{d^3x}{dz^3}\frac{dy}{dz}\right)\frac{dx}{dz}-3\frac{d^2x}{dz^2}\left(\frac{d^2y}{dz^2}\frac{dx}{dz}-\frac{d^2x}{dz^2}\frac{dy}{dz}\right)}{\left(\frac{dx}{dz}\right)^5}.$$

Similmente possiamo esprimere $\frac{d^4y}{dx^4}$, etc.

Questo procedimento è detto « *cambiare la variabile indipendente da x a z;* » poichè in $\frac{d^2y}{dx^2}$ la variabile indipendente è x, ma nell'espressione

$$\frac{\frac{d^2y}{dz^2}\frac{dx}{dz}-\frac{d^2x}{dz^2}\frac{dy}{dz}}{\left(\frac{dx}{dz}\right)^3}$$

la variabile indipendente è z.

197. Supponiamo nell' articolo precedente che si ponga $z=y$.

Abbiamo $\frac{dy}{dz}=1,\ \frac{d^2y}{dz^2}=0,\ \frac{d^3y}{dz^3}=0$, etc.

$$\frac{dx}{dz}=\frac{dx}{dy},\ \frac{d^2x}{dz^2}=\frac{d^2x}{dy^2}, \text{ etc.}$$

e con ciò $$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=-\frac{\frac{dx}{dy}\frac{d^3x}{dy^3}-3\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)^2}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^5}.$$

198. Le formole dell'Art. 197 possono anche ottenersi direttamente come segue,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}};$$

quindi $$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

$$=\frac{d}{dy}\frac{1}{\frac{dx}{dy}}\cdot\frac{dy}{dx}$$

$$=-\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\cdot\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=-\frac{d}{dx}\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3}=-\frac{d}{dy}\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3}\cdot\frac{dy}{dx}.$$

$$= - \frac{\frac{d^3x}{dy^3}\left(\frac{dx}{dy}\right)^3 - 3\left(\frac{dx}{dy}\right)^2\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)^2}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^7}$$

$$= - \frac{\frac{d^3x}{dy^3}\frac{dx}{dy} - 3\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)^2}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^5}$$

Questo procedimento è detto *cambiare la variabile indipendente da x ad y.*

199. Rispetto all'*uso* degli articoli precedenti dobbiamo osservare che, come accade per alcune altre parti del Calcolo Differenziale, lo studente acquista quì materiali da adoperare in alcuni dei soggetti seguenti. Alcune espressioni possono alle volte semplificarsi di molto trasformandole nel modo sopra indicato; di tali esempii se ne vedranno alla fine di questo Capitolo.

200. Il seguente è un caso importante.

Cambiare la variabile indipendente in $x^n \frac{d^ny}{dx^n}$ da x a t, essendo $x = e^t$.

Abbiamo $$\frac{d}{dt}\left(x^n \frac{d^ny}{dx^n}\right) = \frac{d}{dx}\left(x^n \frac{d^ny}{dx^n}\right)\frac{dx}{dt}$$

$$= \left(nx^{n-1}\frac{d^ny}{dx^n} + x^n \frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}\right) x$$

$$= nx^n \frac{d^ny}{dx^n} + x^{n+1}\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}};$$

quindi $$\frac{d}{dt}\left(x^n \frac{d^ny}{dx^n}\right) - nx^n \frac{d^ny}{dx^n} = x^{n+1}\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}.$$

Questo risultato per brevità può essere espresso così

$$\left(\frac{d}{dt} - n\right)x^n \frac{d^ny}{dx^n} = x^{n+1}\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} \quad \ldots\ldots\ldots (1).$$

Si ponga $n = 1$; allora

$$\left(\frac{d}{dt} - 1\right) x \frac{dy}{dx} = x^2 \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Ma
$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = x\frac{dy}{dx};$$

onde
$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{d}{dt} - 1\right)\frac{dy}{dt} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ (2).$$

Si ponga $n = 2$ in (1); allora

$$\left(\frac{d}{dt} - 2\right) x^2 \frac{d^2y}{dx^2} = x^3 \frac{d^3y}{dx^3};$$

o da (2),
$$x^3 \frac{d^3y}{dx^3} = \left(\frac{d}{dt} - 2\right)\left(\frac{d}{dt} - 1\right)\frac{dy}{dt} \;\ldots\ldots\ (3).$$

Procedendo così deduciamo

$$x^n \frac{d^ny}{dx^n} = \left\{\frac{d}{dt} - (n-1)\right\}\left\{\frac{d}{dt} - (n-2)\right\} \ldots \left\{\frac{d}{dt} - 1\right\}\frac{dy}{dt} \ldots\ldots (4).$$

201. È spesso utile nelle applicazioni geometriche del Calcolo Differenziale di avere espressioni per $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{d^2y}{dx^2}$ in termini di θ, supponendo

$$\left.\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (1).$$

Poichè y è per supposizione una funzione di x, segue da (1) che sussiste un'equazione tra r e θ, sicchè r può essere considerata una funzione di θ.

Ora
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{\mathrm{sen}\,\theta\,\frac{dr}{d\theta} + r\cos\theta}{\cos\theta\,\frac{dr}{d\theta} - r\,\mathrm{sen}\,\theta}, \text{ da (1),}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{d\theta}\,\frac{\mathrm{sen}\,\theta\,\frac{dr}{d\theta} + r\cos\theta}{\cos\theta\,\frac{dr}{d\theta} - r\,\mathrm{sen}\,\theta} \cdot \frac{d\theta}{dx}.$$

Il numeratore di questa frazione è

$$\left(\operatorname{sen}\theta\frac{d^2r}{d\theta^2}+2\cos\theta\frac{dr}{d\theta}-r\operatorname{sen}\theta\right)\left(\cos\theta\frac{dr}{d\theta}-r\operatorname{sen}\theta\right)$$
$$-\left(\cos\theta\frac{d^2r}{d\theta^2}-2\operatorname{sen}\theta\frac{dr}{d\theta}-r\cos\theta\right)\left(\operatorname{sen}\theta\frac{dr}{d\theta}+r\cos\theta\right)$$

ed il denominatore è

$$\left(\cos\theta\frac{dr}{d\theta}-r\operatorname{sen}\theta\right)^3.$$

Quindi, $$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{r^2+2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2-r\frac{d^2r}{d\theta^2}}{\left(\cos\theta\frac{dr}{d\theta}-r\operatorname{sen}\theta\right)^3}.$$

202. Sia u una funzione delle variabili indipendenti x ed y, cioè $u=f(x,y)$; e si suppongano x ed y funzioni di due nuove variabili indipendenti r, θ, sicchè

$$x=F_1(r,\theta),$$
$$y=F_2(r,\theta).$$

Si cercano i valori di $\frac{du}{dx}$ e $\frac{du}{dy}$ espressi per mezzo dei coefficienti differenziali di u presi rispetto alle nuove variabili.

Se per x ed y sostituiamo i loro valori in termini di r e θ, rendiamo u una funzione esplicita di r e θ. Ora, per l'Art. 169,

$$\frac{du}{dr}=\frac{du}{dx}\frac{dx}{dr}+\frac{du}{dy}\frac{dy}{dr},$$
$$\frac{du}{d\theta}=\frac{du}{dx}\frac{dx}{d\theta}+\frac{du}{dy}\frac{dy}{d\theta}.$$

Da queste equazioni possono trovarsi $\frac{du}{dx}$ e $\frac{du}{dy}$.

203. Se le equazioni che legano x, y, r, θ, in vece di quelle nell'Art. 202, siano

$$r=F_1(x,y),$$
$$\theta=F_2(x,y),$$

possiamo usare le formole

$$\frac{du}{dx}=\frac{du}{dr}\frac{dr}{dx}+\frac{du}{d\theta}\frac{d\theta}{dx},$$

$$\frac{du}{dy}=\frac{du}{dr}\frac{dr}{dy}+\frac{du}{d\theta}\frac{d\theta}{dy}.$$

204. Se le equazioni che legano x, y, r, θ, sono date nella forma

$$F_1(x, y, r, \theta)=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1),$$

$$F_2(x, y, r, \theta)=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2),$$

per trovare i valori di $\frac{dx}{dr}$, $\frac{dx}{d\theta}$, $\frac{dy}{dr}$, $\frac{dy}{d\theta}$, richiesti dalle formole dell'Art. 202, eliminando successivamente y ed x da (1) e (2), possiamo ottenere esplicitamente i valori di x ed y in termini di r e θ. O pure, per l'Art. 189, possiamo trovare $\frac{dx}{d\theta}$ e $\frac{dy}{d\theta}$ dalle equazioni

$$\left(\frac{dF_1}{d\theta}\right)+\left(\frac{dF_1}{dx}\right)\frac{dx}{d\theta}+\left(\frac{dF_1}{dy}\right)\frac{dy}{d\theta}=0,$$

$$\left(\frac{dF_2}{d\theta}\right)+\left(\frac{dF_2}{dx}\right)\frac{dx}{d\theta}+\left(\frac{dF_2}{dy}\right)\frac{dy}{d\theta}=0,$$

ed usare due simili equazioni per $\frac{dx}{dr}$ e $\frac{dy}{dr}$.

205. Es.

$$u=f(x, y),$$

$$x=r\cos\theta,$$

$$y=r\,\mathrm{sen}\,\theta,$$

$$\frac{dx}{d\theta}=-r\,\mathrm{sen}\,\theta, \qquad \frac{dy}{d\theta}=r\cos\theta,$$

$$\frac{dx}{dr}=\cos\theta, \qquad \frac{dy}{dr}=\mathrm{sen}\,\theta.$$

Quindi, per l'Art. 202,

$$\frac{du}{dr} = \cos\theta \frac{du}{dx} + \operatorname{sen}\theta \frac{du}{dy},$$

$$\frac{du}{d\theta} = -r \operatorname{sen}\theta \frac{du}{dx} + r\cos\theta \frac{du}{dy}$$

onde

$$\left.\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= \cos\theta \frac{du}{dr} - \frac{1}{r}\operatorname{sen}\theta \frac{du}{d\theta}, \\ \frac{du}{dy} &= \operatorname{sen}\theta \frac{du}{dr} + \frac{1}{r}\cos\theta \frac{du}{d\theta}, \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (1).$$

Se procediamo secondo l'Art. 203, dobbiamo porre le equazioni tra x, y, r, θ, sotto la forma

$$r = \sqrt{(x^2 + y^2)}, \qquad \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x};$$

onde,

$$\frac{dr}{dx} = \frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2)}} = \frac{x}{r}, \qquad \frac{d\theta}{dx} = -\frac{y}{x^2+y^2} = -\frac{y}{r^2},$$

$$\frac{dr}{dy} = \frac{y}{\sqrt{(x^2+y^2)}} = \frac{y}{r}, \qquad \frac{d\theta}{dy} = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{x}{r^2};$$

quindi

$$\left.\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= \frac{x}{r}\frac{du}{dr} - \frac{y}{r^2}\frac{du}{d\theta}, \\ \frac{du}{dy} &= \frac{y}{r}\frac{du}{dr} + \frac{x}{r^2}\frac{du}{d\theta}, \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Poichè $\frac{x}{r} = \cos\theta$ ed $\frac{y}{r} = \operatorname{sen}\theta$, le formole (1) e (2) sono d'accordo tra loro.

In questo ramo del soggetto i principianti sono esposti ad errori non ponendo sufficiente attenzione al *significato preciso dei simboli.* Generalmente parlando la notazione matematica è così definita che il significato di ogni simbolo può essere fissato senza badare al contesto; ma alle volte invece di usare un simbolo complesso per esprimere il nostro intento senza alcuna possibilità di errore adoperiamo un simbolo che in sè stesso può essere ambiguo, ma che è reso perfettamente

definito per mezzo della connessione in cui si trova. Così, per esempio, come abbiamo detto nell'Art. 170, le *parentesi* indicative di differenziazione sotto certe condizioni sono alle volte omesse, cioè, si lascia che esse siano suggerite dal contesto.

Nel caso presente il significato dei simboli $\frac{du}{dr}$, $\frac{du}{d\theta}$, $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$ che s'incontrano negli Art. 202 e 203 deve essere osservato accuratamente. Noi potremmo usare una notazione più complessa, come per esempio la seguente; sia $\psi(x, y)$ una funzione di x ed y, e sia $\chi(r, \theta)$ la forma che prende $\psi(x, y)$ quando per x ed y si sostituiscono i loro valori in termini di r e θ; allora

$$\frac{d\chi(r,\theta)}{dr}=\left\{\frac{d\psi(x,y)}{dx}\right\}\frac{dx}{dr}+\left\{\frac{d\psi(x,y)}{dy}\right\}\frac{dy}{dr},$$

e questa è l'equazione che nell'Art. 202 è espressa più brevemente così,

$$\frac{du}{dr}=\frac{du}{dx}\frac{dx}{dr}+\frac{du}{dy}\frac{dy}{dr}.$$

Il principiante però deve rammentarsi che la seconda forma è un'abbreviazione della prima forma, ed egli deve ricorrere alla prima forma se incontra qualche dubbio sul significato dei simboli $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$, $\frac{du}{dr}$.

Non pertanto è rispetto ai simboli $\frac{dx}{dr}$, $\frac{dy}{dr}$, $\frac{dx}{d\theta}$, $\frac{dy}{d\theta}$ che si trovano nell'Art. 202, ed i simboli $\frac{dr}{dx}$, $\frac{d\theta}{dx}$, $\frac{dr}{dy}$, $\frac{d\theta}{dy}$, che si trovano nell'Art. 203, che più frequentemente si commettono errori. Per esempio, i principianti alle volte s'immaginano che il $\frac{dx}{dr}$ dell'Art. 202 ed il $\frac{dr}{dx}$ dell'Art. 203 sono *legati dalla formola* $\frac{dx}{dr}\times\frac{dr}{dx}=1$. Questa formola però non è

affatto applicabile quì; poichè essa suppone che vi sia una sola equazione che racchiude x ed r e nessuna altra variabile, il che quì non ha luogo.

Nell'Art. 202 supponiamo che x ed y siano espressi come funzioni di r e θ, e $\frac{dx}{dr}$ dinota il coefficiente differenziale di x quando r varia ma θ non varia; e come r varia y varierà ancora, sicchè nell'insieme r, x, ed y variano e θ non varia. Nell'Art. 203 supponiamo che r e θ siano espressi come funzioni di x ed y, e $\frac{dr}{dx}$ dinota il coefficiente differenziale di r quando x varia ma y non varia; e come x varia θ varierà ancora; sicchè nell'insieme x, r, e θ variano ed y non varia.

Così il $\frac{dx}{dr}$ dell'Art. 202 ed il $\frac{dr}{dx}$ dell'Art. 203 sono formati in differenti supposizioni riguardo alle quantità che variano e le quantità che non variano.

Nell'esempio del presente articolo il $\frac{dx}{dr}$ dell'Art. 202 $=\cos\theta$, ed il $\frac{dr}{dx}$ dell'Art. 203 $=\frac{x}{r}=\cos\theta$; ed il prodotto dei due *non* è l'unità.

206. Si supponga u una funzione delle tre variabili indipendenti x, y, z, e che queste siano legate da tre equazioni con tre nuove variabili indipendenti θ, φ, r; si cerca di esprimere $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$, $\frac{du}{dz}$, per mezzo dei coefficienti differenziali di u presi rispetto alle nuove variabili.

Abbiamo, per l'Art. 174,

$$\left.\begin{aligned}
\frac{du}{dx}&=\frac{du}{d\theta}\frac{d\theta}{dx}+\frac{du}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dx}+\frac{du}{dr}\frac{dr}{dx}\\
\frac{du}{dy}&=\frac{du}{d\theta}\frac{d\theta}{dy}+\frac{du}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dy}+\frac{du}{dr}\frac{dr}{dy}\\
\frac{du}{dz}&=\frac{du}{d\theta}\frac{d\theta}{dz}+\frac{du}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dz}+\frac{du}{dr}\frac{dr}{dz}
\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots(1).$$

Ma per mezzo delle tre equazioni tra $x, y, z, \theta, \varphi, r$, possiamo determinare i valori di

$$\frac{d\theta}{dx},\ \frac{d\theta}{dy},\ \frac{d\theta}{dz},\ \frac{d\varphi}{dx},\ \frac{d\varphi}{dy},\ \frac{d\varphi}{dz},\ \frac{dr}{dx},\ \frac{dr}{dy},\ \frac{dr}{dz},$$

e quindi le equazioni precedenti esprimono $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$, e $\frac{du}{dz}$, in termini di $\frac{du}{d\theta}$, $\frac{du}{d\varphi}$, e $\frac{du}{dr}$.

Inoltre risolvendo le equazioni precedenti possiamo esprimere $\frac{du}{d\theta}$, $\frac{du}{d\varphi}$, $\frac{du}{dr}$, in termini di $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$, e $\frac{du}{dz}$, i quali possono anche trovarsi per mezzo delle equazioni

$$\left.\begin{aligned} \frac{du}{d\theta} &= \frac{du}{dx}\frac{dx}{d\theta} + \frac{du}{dy}\frac{dy}{d\theta} + \frac{du}{dz}\frac{dz}{d\theta} \\ \frac{du}{d\varphi} &= \frac{du}{dx}\frac{dx}{d\varphi} + \frac{du}{dy}\frac{dy}{d\varphi} + \frac{du}{dz}\frac{dz}{d\varphi} \\ \frac{du}{dr} &= \frac{du}{dx}\frac{dx}{dr} + \frac{du}{dy}\frac{dy}{dr} + \frac{du}{dz}\frac{dz}{dr} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

207. Supponiamo, per dare un esempio su ciò che precede, che si ponga

$$x = r \operatorname{sen}\theta \cos\varphi, \quad y = r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi, \quad z = r\cos\theta.$$

Onde, per applicare le equazioni (2) dell'Art. 206, abbiamo

$$\frac{dx}{d\theta} = r\cos\theta\cos\varphi, \qquad \frac{dy}{d\theta} = r\cos\theta \operatorname{sen}\varphi, \qquad \frac{dz}{d\theta} = -r\operatorname{sen}\theta,$$

$$\frac{dx}{d\varphi} = -r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi, \qquad \frac{dy}{d\varphi} = r\operatorname{sen}\theta\cos\varphi, \qquad \frac{dz}{d\varphi} = 0,$$

$$\frac{dx}{dr} = \operatorname{sen}\theta\cos\varphi, \qquad \frac{dy}{dr} = \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi, \qquad \frac{dz}{dr} = \cos\theta;$$

quindi

$$\left.\begin{aligned} \frac{du}{d\theta} &= r\cos\theta\cos\varphi\frac{du}{dx} + r\cos\theta\operatorname{sen}\varphi\frac{du}{dy} - r\operatorname{sen}\theta\frac{du}{dz} \\ \frac{du}{d\varphi} &= -r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi\frac{du}{dx} + r\operatorname{sen}\theta\cos\varphi\frac{du}{dy} \\ \frac{du}{dr} &= \operatorname{sen}\theta\cos\varphi\frac{du}{dx} + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi\frac{du}{dy} + \cos\theta\frac{du}{dz} \end{aligned}\right\} \ldots (1).$$

Se adoperiamo le equazioni (1) dell' Art. 206, dobbiamo porre le relazioni tra x, y, e z, sotto la forma

$$r = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)},$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{\sqrt{(x^2 + y^2)}}{z},$$

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{y}{x};$$

quindi $\dfrac{dr}{dx} = \dfrac{x}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}} = \dfrac{x}{r} = \operatorname{sen}\theta \cos\varphi,$

$$\frac{dr}{dy} = \frac{y}{r} = \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi,$$

$$\frac{dr}{dz} = \frac{z}{r} = \cos\theta,$$

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{(x^2 + y^2)}} = \frac{\cos\theta \cos\varphi}{r},$$

$$\frac{d\theta}{dy} = \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \frac{y}{\sqrt{(x^2 + y^2)}} = \frac{\cos\theta \operatorname{sen}\varphi}{r},$$

$$\frac{d\theta}{dz} = -\frac{\sqrt{(x^2 + y^2)}}{x^2 + y^2 + z^2} = -\frac{\operatorname{sen}\theta}{r},$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{y}{x^2 + y^2} = -\frac{\operatorname{sen}\varphi}{r \operatorname{sen}\theta},$$

$$\frac{d\varphi}{dy} = \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{\cos\varphi}{r \operatorname{sen}\theta},$$

$$\frac{d\varphi}{dz} = 0;$$

quindi

$$\left.\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= \operatorname{sen}\theta \cos\varphi \frac{du}{dr} + \frac{\cos\theta \cos\varphi}{r} \frac{du}{d\theta} - \frac{\operatorname{sen}\varphi}{r \operatorname{sen}\theta} \frac{du}{d\varphi} \\ \frac{du}{dy} &= \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi \frac{du}{dr} + \frac{\cos\theta \operatorname{sen}\varphi}{r} \frac{du}{d\theta} + \frac{\cos\varphi}{r \operatorname{sen}\theta} \frac{du}{d\varphi} \\ \frac{du}{dz} &= \cos\theta \frac{du}{dr} - \frac{\operatorname{sen}\theta}{r} \frac{du}{d\theta} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (2),$$

il che si troverà d'accordo con (1).

Per esercizio diamo i risultati che nascono dal differenziare le equazioni (2) della precedente investigazione.

$$\frac{d^2u}{dx\,dy}=\frac{\operatorname{sen}2\varphi}{2}\left\{\operatorname{sen}^2\theta\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{\cos^2\theta}{r^2}\frac{d^2u}{d\theta^2}-\frac{1}{r^2\operatorname{sen}^2\theta}\frac{d^2u}{d\varphi^2}\right.$$
$$\left.+\frac{\operatorname{sen}2\theta}{r}\frac{d^2u}{d\theta\,dr}-\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{r}\frac{du}{dr}-\frac{\cos\theta}{r^2}\left(2\operatorname{sen}\theta+\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\right)\frac{du}{d\theta}\right\}$$
$$+\cos2\varphi\left\{\frac{1}{r}\frac{d^2u}{d\varphi\,dr}+\frac{\cot\theta}{r^2}\frac{d^2u}{d\varphi\,d\theta}-\frac{1}{r^2\operatorname{sen}^2\theta}\frac{du}{d\varphi}\right\};$$

$$\frac{d^2u}{dx\,dz}=\frac{\operatorname{sen}2\theta}{2}\cos\varphi\left\{\frac{d^2u}{dr^2}-\frac{1}{r^2}\frac{d^2u}{d\theta^2}-\frac{1}{r}\frac{du}{dr}\right\}$$
$$+\frac{\cos2\theta\cos\varphi}{r}\left\{\frac{d^2u}{d\theta\,dr}-\frac{1}{r}\frac{du}{d\theta}\right\}$$
$$+\frac{\operatorname{sen}\varphi}{r}\left\{\frac{1}{r}\frac{d^2u}{d\theta\,d\varphi}-\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\frac{d^2u}{dr\,d\varphi}\right\}$$
$$=\frac{\operatorname{sen}2\theta\cos\varphi}{2}A+\frac{\cos2\theta\cos\varphi}{r}B+\frac{\operatorname{sen}\varphi}{r}C,\text{ poniamo;}$$

$$\frac{d^2u}{dy\,dz}=\frac{\operatorname{sen}2\theta\operatorname{sen}\varphi}{2}A+\frac{\cos2\theta\operatorname{sen}\varphi}{r}B-\frac{\cos\varphi}{r}C;$$

$$\frac{d^2u}{dz^2}=\cos^2\theta\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{r}\left(\frac{1}{r}\frac{d^2u}{d\theta^2}+\frac{du}{dr}\right)+\frac{\operatorname{sen}2\theta}{r}\left(\frac{1}{r}\frac{du}{d\theta}-\frac{d^2u}{dr\,d\theta}\right);$$

$$\frac{d^2u}{dx^2}=$$
$$\cos^2\varphi\left\{\operatorname{sen}^2\theta\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{\cos^2\theta}{r^2}\frac{d^2u}{d\theta^2}+\frac{\operatorname{sen}2\theta}{r}\frac{d^2u}{dr\,d\theta}+\frac{\cos^2\theta}{r}\frac{du}{dr}-\frac{\operatorname{sen}2\theta}{r^2}\frac{du}{d\theta}\right\}$$
$$-\frac{\operatorname{sen}2\varphi}{r}\left\{\frac{d^2u}{d\varphi\,dr}+\frac{\cot\theta}{r}\frac{d^2u}{d\theta\,d\varphi}-\frac{1}{r\operatorname{sen}^2\theta}\frac{du}{d\varphi}\right\}$$
$$+\frac{\operatorname{sen}^2\varphi}{r}\left\{\frac{1}{r\operatorname{sen}^2\theta}\frac{d^2u}{d\varphi^2}+\frac{du}{dr}+\frac{\cot\theta}{r}\frac{du}{d\theta}\right\},$$
$$=\cos^2\varphi\,L-\frac{\operatorname{sen}2\varphi}{r}M+\frac{\operatorname{sen}^2\varphi}{r}N,\text{ poniamo,}$$

$$\frac{d^2u}{dy^2}=\operatorname{sen}^2\varphi\,L+\frac{\operatorname{sen}2\varphi}{r}M+\frac{\cos^2\varphi}{r}N.$$

Addizionando, abbiamo

$$\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}+\frac{d^2u}{dz^2}=\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{1}{r^2}\frac{d^2u}{d\theta^2}+\frac{1}{r^2\operatorname{sen}^2\theta}\frac{d^2u}{d\varphi^2}+\frac{2}{r}\frac{du}{dr}+\frac{\cot\theta}{r^2}\frac{du}{d\theta}.$$

208. L'esempio seguente per *due* variabili indipendenti è analogo a quello nell'Art. 200 per *una* variabile indipendente.

Se $x=e^\theta$ ed $y=e^\varphi$ si cerca di cambiare le variabili indipendenti da x ed y a θ e φ nell'espressione

$$x^n\frac{d^nu}{dx^n}+nx^{n-1}y\frac{d^nu}{dx^{n-1}dy}+\frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}y^2\frac{d^nu}{dx^{n-2}dy^2}+\dots$$

Si dinoti questa espressione con v_n, e dinoti v_{n+1} ciò che essa diventa quando n si cambia in $n+1$; dimostreremo che

$$v_{n+1}=\frac{dv_n}{d\theta}+\frac{dv_n}{d\varphi}-nv_n\dots\dots\text{(1)}.$$

Infatti $$\frac{dv_n}{d\theta}=\frac{dv_n}{dx}\frac{dx}{d\theta}=x\frac{dv_n}{dx},$$

e $$\frac{dv_n}{d\varphi}=\frac{dv_n}{dy}\frac{dy}{d\varphi}=y\frac{dv_n}{dy}.$$

Ora si prenda un termine qualunque nell'espressione rappresentata da v_n e si eseguano le operazioni seguenti; si differenzii il termine rispetto ad x e dopo si moltiplichi per x; si differenzii il termine rispetto ad y e dopo si moltiplichi per y; indi si aggiungano i due risultati. Si prenda per esempio l'$(r+1)^{mo}$ termine cioè

$$\frac{n(n-1)\dots(n-r+1)}{\underline{|r}}x^{n-r}y^r\frac{d^nu}{dx^{n-r}dy^r},$$

ed eseguendo le operazioni otteniamo

$$\frac{n(n-1)\dots(n-r+1)}{\underline{|r}}\left\{x^{n+1-r}y^r\frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1-r}dy^r}+x^{n-r}y^{r+1}\frac{d^{n+1}u}{dx^{n-r}dy^{r+1}}\right.$$
$$\left.+nx^{n-r}y^r\frac{d^nu}{dx^{n-r}dy^r}\right\}.$$

Da ciò deduciamo che $x\frac{dv_n}{dx}+y\frac{dv_n}{dy}$ è eguale ad nv_n insieme con due serie; ed unendo i termini simili nelle due serie otteniamo una sola serie di cui il termine generale è

$$\frac{(n+1)n(n-1)\dots(n+1-r+1)}{\lfloor r}x^{n+1-r}y^r\frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1-r}dy^r}.$$

Quindi $$x\frac{dv_n}{dx}+y\frac{dv_n}{dy}=nv_n+v_{n+1};$$

e così (1) è dimostrata; possiamo scrivere (1) per abbreviazione così,

$$v_{n+1}=\left\{\frac{d}{d\theta}+\frac{d}{d\varphi}-n\right\}v_n\dots\dots\dots\dots(2).$$

Si ponga $n=1$ in (2); allora

$$v_2=\left\{\frac{d}{d\theta}+\frac{d}{d\varphi}-1\right\}v_1=\left\{\frac{d}{d\theta}+\frac{d}{d\varphi}-1\right\}\left\{x\frac{du}{dx}+y\frac{du}{dy}\right\}$$
$$=\left\{\frac{d}{d\theta}+\frac{d}{d\varphi}-1\right\}\left\{\frac{du}{d\theta}+\frac{du}{d\varphi}\right\}=\left\{\frac{d}{d\theta}+\frac{d}{d\varphi}-1\right\}\left\{\frac{d}{d\theta}+\frac{d}{d\varphi}\right\}u,$$

come si può scrivere; si ponga poi $n=2$ in (2); allora

$$v_3=\left\{\frac{d}{d\theta}+\frac{d}{d\varphi}-2\right\}v_2=\left\{\frac{d}{d\theta}+\frac{d}{d\varphi}-2\right\}\left\{\frac{d}{d\theta}+\frac{d}{d\varphi}-1\right\}\left\{\frac{d}{d\theta}+\frac{d}{d\varphi}\right\}u.$$

Procedendo nello stesso modo otteniamo

$$v_n=\left\{\frac{d}{d\theta}+\frac{d}{d\varphi}-(n-1)\right\}\dots\left\{\frac{d}{d\theta}+\frac{d}{d\varphi}-2\right\}\left\{\frac{d}{d\theta}+\frac{d}{d\varphi}-1\right\}\left\{\frac{d\theta}{d\varphi}+\frac{d}{d\varphi}\right\}u.$$

ESEMPII.

1. Cambiare la variabile indipendente da x ad y nell'equazione

$$x^2\frac{d^2u}{dx^2}+x\frac{du}{dx}+u=0,$$

supponendo $y=\log x$. *Risultato* $\frac{d^2u}{dy^2}+u=0.$

2. Trasformare $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2x}{1+x^2}\frac{dy}{dx} + \frac{y}{(1+x^2)^2} = 0$ in un'equazione nella quale θ è la variabile indipendente, essendo $\theta = \tan^{-1} x$.

Risultato $\frac{d^2y}{d\theta^2} + y = 0$.

3. Trasformare $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + y = 0$, in un'equazione nella quale t è la variabile indipendente, essendo $x^2 = 4t$.

Risultato $t\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + y = 0$.

4. Se $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y}{(e^x + e^{-x})^2}$, ed $x = \log \frac{t}{\sqrt{(1-t^2)}}$, mostrare che

$$(t - t^3)\frac{d^2y}{dt^2} + (1 - 3t^2)\frac{dy}{dt} = ty.$$

5. Se $x = \cos t$, allora

$$(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} = 0 \text{ diventa } \frac{d^2y}{dt^2} = 0.$$

6. Trasformare $\frac{x\frac{dy}{dx} - y}{\sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}}$, prendendo $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\theta$.

Risultato $\frac{r^2}{\sqrt{\left\{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right\}}}$.

7. Se $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$, mostrare che

$$\frac{x + y\frac{dy}{dx}}{x\frac{dy}{dx} - y} = \frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta}.$$

8. Se $x = a(1 - \cos t)$ ed $y = a(nt + \text{sen}\, t)$, esprimere $\frac{d^2y}{dx^2}$ in termini di t. *Risultato* $-\frac{n\cos t + 1}{a\,\text{sen}^3 t}$.

9. Si supponga u una funzione di r ed

$$r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots\ldots + x_n^2;$$

allora se

$$\frac{d^2u}{dx_1^2} + \frac{d^2u}{dx_2^2} + \frac{d^2u}{dx_3^2} + \ldots\ldots + \frac{d^2u}{dx_n^2} = 0,$$

mostrare che

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{n-1}{r}\frac{du}{dr} = 0.$$

10. Dati $x = a\cos\varphi$, $y = b\operatorname{sen}\varphi$, esprimere

$$\frac{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{-\frac{d^2y}{dx^2}} \text{ in termini di } \varphi.$$

Risultato $\dfrac{(a^2\operatorname{sen}^2\varphi + b^2\cos^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}{ab}$.

11. Trasformare $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2\dfrac{e^{2x} - e^{-2x}}{e^{2x} + e^{-2x}}\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{4n^2y}{(e^{2x} + e^{-2x})^2} = 0$

in un'equazione nella quale t sia la variabile indipendente, essendo $x = \log\sqrt{(\tan t)}$.

Risultato $\dfrac{d^2y}{dt^2} + n^2y = 0$.

12. Cambiare la variabile indipendente da y ad x in $\dfrac{d^3u}{dy^3} - 4\tan y\dfrac{d^2u}{dy^2} + 2\tan^2 y\dfrac{du}{dy} = 0$, supponendo $\tan y = x$.

Risultato $(1 + x^2)^2\dfrac{d^3u}{dx^3} + 2x(1 + x^2)\dfrac{d^2u}{dx^2} + 2\dfrac{du}{dx} = 0$.

13. Trasformare $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2$ in un'espressione nella quale y è la variabile indipendente.

14. Dato $x = t + t^2$, trasformare $\dfrac{d^2u}{dt^2}$ in un'espressione nella quale x è la variabile indipendente.

15. Se $$z = u - e \operatorname{sen} u,$$

e $$\tan\frac{u}{2} = \sqrt{\left(\frac{1-e}{1+e}\right)} \tan\frac{v}{2},$$

dimostrare che $$\frac{dz}{dv} = \frac{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}{(1+e\cos v)^2}.$$

16. Se $$(a^2 - x^2)\frac{d^2z}{dx^2} - \frac{a^2}{x}\frac{dz}{dx} - z = 0,$$

ed $$x^2 + y^2 = a^2,$$

dimostrare che $x^2 \dfrac{d^2z}{dy^2} - z = 0.$

17. Trasformare

$$(a+bx)^2\frac{d^2y}{dx^2} + A\,(a+bx)\frac{dy}{dx} + By = F(x),$$

ponendo $a + bx = e^t$.

18. Se z è una funzione delle due variabili indipendenti x ed y, ed x ed y sono legate con due nuove variabili r e θ per mezzo di due equazioni, esprimere

$$\frac{d^2z}{dx^2},\quad \frac{d^2z}{dx\,dy},\quad \text{e}\quad \frac{d^2z}{dy^2},$$

in termini delle nuove variabili

Es. Se $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$, mostrare che

$$\frac{d^2z}{dx^2} = A + B\cos 2\theta - C\operatorname{sen} 2\theta,$$

$$\frac{d^2z}{dy^2} = A - B\cos 2\theta + C\operatorname{sen} 2\theta,$$

$$\frac{d^2z}{dx\,dy} = B\operatorname{sen} 2\theta + C\cos 2\theta;$$

in cui $A + B = \dfrac{d^2z}{dr^2}$, $A - B = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{d^2z}{d\theta^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{dz}{dr}$,

$$C = \frac{1}{r}\frac{d^2z}{dr\,d\theta} - \frac{1}{r^2}\frac{dz}{d\theta}.$$

19. Se x, y, z e ξ, η, ζ, sono le coordinate dello stesso punto P riferito a due differenti sistemi rettangolari, dimostrare che

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d^2\varphi}{dy^2}+\frac{d^2\varphi}{dz^2}=\frac{d^2\varphi}{d\xi^2}+\frac{d^2\varphi}{d\eta^2}+\frac{d^2\varphi}{d\zeta^2}.$$

20. Es. Se $\quad x\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{x}{y}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{dy}{dx}=0,$

ed $\quad x=ye^z,$

dimostrare che $y\frac{d^2z}{dy^2}+\frac{dz}{dy}=0.$

21. Dato $\quad u=\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2;$

e $\quad \left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2=1,$

mostrare che

$$u\left(\frac{ds}{dt}\right)^4=\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2-\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2.$$

22. Trasformare $\frac{d^2y}{d\theta^2}-\sec\theta\operatorname{cosec}\theta\frac{dy}{d\theta}+y\,n^2\tan^2\theta=0$, in un'equazione nella quale x sia la variabile indipendente, avendo messo $x=\log(\sec\theta)$.

Risultato $\frac{d^2y}{dx^2}+n^2y=0.$

23. Se $y=e^{-\theta}$ ed $x=\operatorname{sen}\theta$.

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{e^{-\theta}}{\cos^5\theta}\{3\operatorname{sen}\theta\cos\theta-\operatorname{sen}^2\theta-2\}.$$

24. Se $s=e^x+e^y$, e $t=e^{-x}+e^{-y}$, esprimere

$$\frac{d^2u}{dx^2}+2\frac{d^2u}{dx\,dy}+\frac{d^2u}{dy^2} \text{ in termini di } \frac{du}{ds},\ \frac{du}{dt},\ldots$$

Risultato $s^2\frac{d^2u}{ds^2}-2st\frac{d^2u}{ds\,dt}+t^2\frac{d^2u}{dt^2}+s\frac{du}{ds}+t\frac{du}{dt}.$

25. Se $x=ae^\theta\cos\varphi$, ed $y=ae^\theta\operatorname{sen}\varphi$, mostrare che

$$y^2\frac{d^2u}{dx^2}-2xy\frac{d^2u}{dx\,dy}+x^2\frac{d^2u}{dy^2}=\frac{d^2u}{d\varphi^2}+\frac{du}{d\theta}.$$

CAPITOLO XIII.

MASSIMI E MINIMI DELLE FUNZIONI DI UNA VARIABILE.

209. Si supponga $\varphi(x)$ dinotare una certa funzione di x, e che mentre la variabile x passa gradatamente da un definito valore ad un altro, $\varphi(x)$ varii in modo che sia talora crescente e talora decrescente. Vi debbono essere allora alcuni valori di x, per i quali $\varphi(x)$ incomincia a decrescere, essendo stata prima crescente, o incomincia a crescere, essendo stata prima decrescente. Nel primo caso, $\varphi(x)$ ha per il valore particolare di x un valore maggiore di quelli che ha per i valori adiacenti di x, e si dice di avere un valore *massimo*. Nel secondo caso, $\varphi(x)$ ha pel valore particolare di x un valore minore di quelli che ha per i valori adiacenti di x, e si dice di avere un valore *minimo*. Quindi, questi termini *massimo* e *minimo* non sono usati per dinotare i valori aritmeticamente più grandi e più piccoli che una funzione può prendere; poichè si vede per la spiegazione precedente che una funzione *può* avere diversi valori massimi e minimi, e che un particolare minimo può essere maggiore di un particolare massimo.

210. Def. Se mentre x cresce o decresce dal valore a per un intervallo finito, comunque piccolo, $\varphi(x)$ è sempre minore di $\varphi(a)$, allora $\varphi(a)$ si dice un valore *massimo* di $\varphi(x)$; se $\varphi(x)$ è sempre maggiore di $\varphi(a)$, allora $\varphi(a)$ si dice un valore *minimo* di $\varphi(x)$.

211. *Regola per scoprire i valori massimi e minimi.*

Dinoti $\varphi(x)$ una funzione qualunque di x. Per l'Art. 92, abbiamo

$$\varphi(x+h)=\varphi(x)+h\varphi'(x)+\frac{h^2}{1.2}\varphi''(x+\theta h).$$

Se $\varphi'(x)$ non è zero possiamo dare un tale valore ad h che il segno di

$$h\varphi'(x) + \frac{h^2}{1.2}\varphi''(x + \theta h)$$

sarà per questo valore di h, e per tutti i valori inferiori di h, lo stesso che il segno di $h\varphi'(x)$, poichè $\frac{h}{2}\varphi''(x+\theta h)$ può sempre rendersi minore di $\varphi'(x)$ prendendo h sufficientemente piccolo. In questo caso

$$\varphi(x + h) - \varphi(x)$$

e $$\varphi(x - h) - \varphi(x)$$

hanno segni *differenti*, e per conseguenza $\varphi(x)$ non ha nè un massimo nè un minimo valore.

Adunque, come prima condizione per l'esistenza di un valore massimo o minimo di $\varphi(x)$, dobbiamo avere

$$\varphi'(x) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Sia a un valore di x dedotto dall'equazione (1), sicchè

$$\varphi'(a) = 0.$$

Abbiamo ora, per l'Art. 92,

$$\varphi(a + h) = \varphi(a) + \frac{h^2}{1.2}\varphi''(a) + \frac{h^3}{\lfloor 3}\varphi'''(a + \theta h).$$

Si supponga $\varphi''(a)$ diverso da zero; allora dando ad h un valore sufficientemente piccolo, il segno di

$$\frac{h^2}{1.2}\varphi''(a) + \frac{h^3}{\lfloor 3}\varphi'''(a + \theta h)$$

sarà lo stesso che quello di $\frac{h^2}{1.2}\varphi''(a)$, o di $\varphi''(a)$, per questo valore di h e per tutti i valori inferiori;

quindi $$\varphi(a + h) - \varphi(a),$$

e $$\varphi(a - h) - \varphi(a),$$

hanno gli *stessi* segni.

Se dunque $\varphi''(a)$ è *positivo* $\varphi(a)$ è un valore minimo di $\varphi(x)$; se $\varphi''(a)$ è negativo $\varphi(a)$ è un valore massimo di $\varphi(x)$.

Se $\varphi''(a)$ svanisce del pari che $\varphi'(a)$ allora, per l'Art. 92,

$$\varphi(a+h) = \varphi(a) + \frac{h^3}{\lfloor 3}\varphi'''(a) + \frac{h^4}{\lfloor 4}\varphi''''(a+\theta h).$$

Con ragionamento simile a quello usato innanzi, possiamo mostrare che se $\varphi'''(a)$ non svanisce $\varphi(a)$ non può essere nè un massimo nè un minimo valore di $\varphi(x)$; ma che se $\varphi'''(a)$ svanisce è $\varphi''''(a)$ è positivo $\varphi(a)$ è un minimo, e se $\varphi'''(a)$ svanisce e $\varphi''''(a)$ è negativo $\varphi(a)$ è un massimo.

Poichè questo procedimento può essere continuato finchè si arrivi ad un coefficiente differenziale che *non* svanisce per $x=a$, abbiamo il seguente risultato. Affinchè $\varphi(x)$ possa avere un valore massimo o minimo quando $x=a$, è necessario che questo valore di x faccia svanire un numero *dispari* di coefficienti differenziali successivi di $\varphi(x)$, cominciando dal primo; quando questa condizione è soddisfatta $\varphi(a)$ è un massimo se il coefficiente differenziale seguente è negativo ed un minimo se esso è positivo.

212. Si deve osservare che nella dimostrazione precedente abbiamo usato θ per dinotare una *frazione minore dell'unità*, e non si deve supporre che la *stessa* frazione sia dinotata ovunque il simbolo viene adoperato. Inoltre abbiamo supposto al solito che nessuna delle funzioni $\varphi'(a)$, $\varphi''(a)$, etc. sia infinita. Vedremo quì appresso, che i valori massimi e minimi si *possono* avere quando $\varphi'(x)=\infty$, del pari che quando $\varphi'(x)=0$.

213. Supponiamo che quando $x=a$, la funzione $\varphi(x)$ abbia un valore massimo o minimo, e che $\varphi^n(a)$ sia il primo coefficiente differenziale che non svanisca, *n essendo pari*. Per l'Art. 92, poichè $\varphi'(a)$, $\varphi''(a)$, etc. svaniscono tutti sino a $\varphi^{n-1}(a)$ inclusivamente, abbiamo

$$\varphi'(a+h) = \frac{h^{n-1}}{\lfloor n-1}\varphi^n(a) + \frac{h^n}{\lfloor n}\varphi^{n+1}(a+\theta h),$$

$$\varphi'(a-h) = -\frac{h^{n-1}}{\lfloor n-1}\varphi^n(a) + \frac{h^n}{\lfloor n}\varphi^{n+1}(a-\theta_1 h),$$

in cui θ e θ_1 sono frazioni proprie.

Da questi valori di $\varphi'(a+h)$ e $\varphi'(a-h)$ vediamo che $\varphi'(x)$ cambia di segno quando x passa pel valore a. Se supponiamo *x crescere* e passare pel valore a, allora $\varphi'(x)$ muta dal po-

sitivo al negativo se $\varphi''(a)$ è negativo, cioè, se $\varphi(a)$ è un massimo; e $\varphi'(x)$ muta dal negativo al positivo se $\varphi''(a)$ è positivo, cioè, se $\varphi(a)$ è un minimo. Ciò suggerisce un'altra forma per la definizione dei valori massimi e minimi e per la ricerca delle condizioni della loro esistenza che diamo nel prossimo articolo.

214. Def. Se variando x in un intervallo finito, comunque piccolo, $\varphi(x)$ cresce finchè $x=a$ e poi decresce, $\varphi(a)$ si dice un valore massimo di $\varphi(x)$; se $\varphi(x)$ decresce finchè $x=a$ e poi cresce, $\varphi(a)$ si dice un valore minimo.

Per l'Art. 89, se il coefficiente differenziale di una funzione è positivo questa funzione cresce con la variabile, e se il coefficiente differenziale è negativo la funzione decresce al crescere della variabile. Quindi, al crescere di x, $\varphi'(x)$ deve passare dal positivo al negativo quando $x=a$, se $\varphi(a)$ è un massimo, e dal negativo al positivo se $\varphi(a)$ è un minimo. Ma una funzione può solamente mutare il suo segno passando per zero o per l'infinito. Quindi, dobbiamo trovare i valori di x che rendono

$$\varphi'(x)=0,$$

o

$$\varphi'(x)=\infty;$$

e se passando x per uno di questi valori $\varphi'(x)$ muta di segno, abbiamo per questo valore di x un massimo o minimo valore di $\varphi(x)$, secondo che, crescendo x, il cangiamento è dal positivo al negativo o dal negativo al positivo.

Es. (1) Si supponga $\varphi(x)=x^3-9x^2+24x-7$,

allora $$\varphi'(x)=3(x^2-6x+8),$$
$$\varphi''(x)=6(x-3).$$

Se poniamo $\varphi'(x)=0$ otteniamo $x=2$, o $x=4$;

quando $x=2$, $\varphi''(x)$ è negativo,

quando $x=4$, $\varphi''(x)$ è positivo.

Quindi quando $x=2$, $\varphi(x)$ ha un valore massimo, e quando $x=4$, $\varphi(x)$ ha un valore minimo.

Es. (2) Sia $$\varphi(x)=e^x+e^{-x}+2\cos x;$$

onde $$\varphi'(x)=e^x-e^{-x}-2\operatorname{sen} x,$$
$$\varphi''(x)=e^x+e^{-x}-2\cos x,$$

$$\varphi'''(x) = e^x - e^{-x} + 2\,\mathrm{sen}\,x,$$

$$\varphi''''(x) = e^x + e^{-x} + 2\cos x.$$

Se $x = 0$, abbiamo $\varphi'(x) = 0$, $\varphi''(x) = 0$, $\varphi'''(x) = 0$, e $\varphi''''(x) = 4$. Quindi, $\varphi(x)$ è un minimo per $x = 0$.

Si può mostrare facilmente che $x = 0$ è il solo valore di x pel quale $\varphi'(x)$ svanisce; infatti

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{\underline{|2}} + \text{etc.},$$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{\underline{|2}} - \frac{x^3}{\underline{|3}} + \text{etc.},$$

$$2\,\mathrm{sen}\,x = 2\left\{x - \frac{x^3}{\underline{|3}} + \frac{x^5}{\underline{|5}} - \text{etc.}\right\};$$

quindi $$\varphi'(x) = 4\left\{\frac{x^3}{\underline{|3}} + \frac{x^7}{\underline{|7}} + \frac{x^{11}}{\underline{|11}} + \text{etc.}\right\}.$$

Tutt'i termini in $\varphi'(x)$ essendo dello *stesso* segno, $\varphi'(x)$ non può mai svanire eccetto quando $x = 0$.

Es. (3) si supponga $\frac{du}{dx} = x(x-1)^2(x-3)^3$, per quali valori di x sarà u un massimo o un minimo? In questo esempio il metodo dell'Art. 214 è preferibile. Quando x è negativo $\frac{du}{dx}$ è positivo; quando x è positivo e minore dell'unità, $\frac{du}{dx}$ è negativo. Quindi $\frac{du}{dx}$ muta dal positivo al negativo quando x passa pel valore 0, ed $x=0$ rende u un massimo. Quando $x = 1$, $\frac{du}{dx}$ svanisce; esso però non cangia il suo segno, ma continua ad essere negativo finchè $x = 3$, e dopo ciò esso è positivo. Quindi, quando $x = 1$, u non ha nè un massimo nè un minimo valore, ma ha un valore minimo quando $x=3$.

Supponiamo che nell'ultimo esempio dato si volesse semplicemente conoscere se $x = 0$ dà un valore massimo o minimo ad u, e che dovessimo procedere secondo il metodo dell'Art. 211: abbiamo

$$\frac{du}{dx} = x(x-1)^2(x-3)^3,$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = (x-1)^2(x-3)^3 + 2x(x-1)(x-3)^3 + 3x(x-1)^2(x-3)^2;$$

quando $x = 0$ il primo termine in $\frac{d^2u}{dx^2}$ è negativo, *e gli altri due termini svaniscono poichè essi hanno tutti e due x per fattore.* Quindi non avevamo bisogno di esprimerli, ma potevamo porre

$$\frac{d^2u}{dx^2} = (x-1)^2(x-3)^3 + \text{termini che svaniscono quando } x = 0.$$

Questa osservazione è importante ad essere notata, poichè in esempii come il precedente ci risparmia la pena di scrivere termini superflui.

215. *Valori massimi e minimi di una funzione implicita.*

Sia $\varphi(x, y) = 0$ un'equazione che lega x ed y; si cerca di trovare i valori massimi o minimi di y. Per la data equazione conosciamo che y deve essere *una certa* funzione di x, e se l'equazione si può risolvere possiamo esprimere y esplicitamente in termini di x, e quindi trovare i valori massimi o minimi di y per gli articoli precedenti.

Ma invece di risolvere la data equazione possiamo procedere nel seguente modo: per l'Art. 177,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\left(\frac{du}{dx}\right)}{\left(\frac{du}{dy}\right)};$$

in cui u sta per $\varphi(x, y)$. Ma i valori di x che rendono y un massimo o un minimo debbono, per l'Art. 211, trovarsi risolvendo l'equazione $\frac{dy}{dx} = 0$. Quindi

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = 0,$$

e questa equazione, combinata con $u = 0$, determinerà i valori di x, che *possono* rendere y un massimo o un minimo. Per determinare se un tale valore di x *rende* y un massimo

o un minimo, dobbiamo, per l'Art. 211, esaminare il valore di $\frac{d^2y}{dx^2}$. Per l'Art. 180, poichè $\left(\frac{du}{dx}\right)=0$, abbiamo

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)}{\left(\frac{du}{dy}\right)}.$$

Quindi abbiamo questa regola: Per trovare i valori massimi o minimi di y, che è una funzione implicita di x determinata da $u=0$, dobbiamo trovare i valori di x ed y che soddisfano $u=0$ e $\left(\frac{du}{dx}\right)=0$. Se quando questi valori si sostituiscono in $\frac{\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)}{\left(\frac{du}{dy}\right)}$ la frazione è *positiva*, abbiamo ottenuto un valore massimo di y; se la frazione è *negativa*, abbiamo un valore minimo di y.

Es. Se $$x^3-3axy+y^3=0 \ldots\ldots\ldots\ldots (1),$$
trovare i valori massimi o minimi di y.

Qui $$\frac{dy}{dx}=\frac{ay-x^2}{y^2-ax};$$

quindi $$ay-x^2=0 \ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Combinando (1) con (2), abbiamo
$$x^6-2a^3x^3=0;$$
onde $$x=0,$$
o $$x=a\sqrt[3]{2}.$$

I corrispondenti valori di y sono
$$y=0,$$
$$y=a\sqrt[3]{4}.$$

Se sostituiamo i valori $x=a\sqrt[3]{2}$, $y=a\sqrt[3]{4}$, in $-\frac{\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)}{\left(\frac{du}{dy}\right)}$,

cioè, in $-\frac{6x}{3(y^2-ax)}$, otteniamo $-\frac{2}{a}$. Quindi vi è un valore massimo di y. I valori $x=0$, $y=0$, che annullano il numeratore di $\frac{dy}{dx}$, annullano anche il suo denominatore; così $\frac{dy}{dx}$ prende una forma indeterminata, e dobbiamo scoprire il suo effettivo valore. Formando le equazioni derivate della data equazione, abbiamo

$$(y^2-ax)\frac{d^2y}{dx^2}+2y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2a\frac{dy}{dx}+2x=0,$$

$$(y^2-ax)\frac{d^3y}{dx^3}+\left(6y\frac{dy}{dx}-3a\right)\frac{d^2y}{dx^2}+2\left(\frac{dy}{dx}\right)^3+2=0.$$

Allorchè poniamo in queste $x=0$, $y=0$, la prima ci dà $\frac{dy}{dx}=0$, e la seconda $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2}{3a}$. Quindi, quando $x=0$, ed $y=0$, y è un minimo.

216. Se i valori di x ed y trovati da $u=0$ e $\left(\frac{du}{dx}\right)=0$, annullano $\frac{d^2y}{dx^2}$, allora affinchè essi possano rendere y un massimo o minimo, sarà necessario che anche $\frac{d^3y}{dx^3}$ svanisca. Ciò può essere attestato facendo uso del valore di $\frac{d^3y}{dx^3}$ dato nell' Art. 184; ed ottenendo una formola per $\frac{d^4y}{dx^4}$ simile a quella per $\frac{d^3y}{dx^3}$ or ora indicata, possiamo accertare se $\frac{d^4y}{dx^4}$ è positivo o negativo per i valori particolari di x ed y. Non pertanto a motivo della complicazione delle formole generali per $\frac{d^3y}{dx^3}$ e $\frac{d^4y}{dx^4}$, è preferibile di determinarle in ogni esempio direttamente col *metodo* dell'Art. 184, anzichè richiamare i risultati di quell'articolo.

217. Si supponga $u=\varphi(x,y)$ e $\psi(x,y)=0$; sicchè y è una funzione di x per la seconda equazione, e quindi per la prima equazione u è una funzione di x; si cercano i valori massimi e minimi di u. Possiamo procedere teoreticamente così:

si risolva l'equazione $\psi(x, y) = 0$, e così otteniamo y in funzione di x; si sostituisca questo valore di y in $\varphi(x, y)$; così u diviene una funzione della sola x, ed i suoi valori massimi e minimi possono trovarsi con le regole precedenti. Ma possiamo evitare la difficoltà di risolvere l'equazione $\psi(x, y) = 0$, nel seguente modo.

Per l'Art. 172, abbiamo

$$\frac{du}{dx} = \left(\frac{du}{dx}\right) + \left(\frac{du}{dy}\right) \frac{dy}{dx}.$$

Inoltre, ponendo v per $\psi(x, y)$, abbiamo, per l'Art. 177,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\left(\frac{dv}{dx}\right)}{\left(\frac{dv}{dy}\right)};$$

onde

$$\frac{du}{dx} = \left(\frac{du}{dx}\right) - \frac{\left(\frac{du}{dy}\right)\left(\frac{dv}{dx}\right)}{\left(\frac{dv}{dy}\right)}.$$

Quindi, i valori di x ed y che rendono u un massimo o un minimo debbono cercarsi tra quelli che soddisfano simultaneamente

$$\left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{dv}{dy}\right) - \left(\frac{du}{dy}\right)\left(\frac{dv}{dx}\right) = 0,$$

e $\psi(x, y)$ o $v = 0$.

Il valore di $\frac{d^2u}{dx^2}$ deve poi trovarsi con l'Art. 176, e dobbiamo esaminare se i valori particolari di x ed y lo rendono positivo o negativo, per determinare se u è un massimo o un minimo.

Es. $$u = x^2 + y^2,$$

mentre $$(x - a)^2 + (y - b)^2 - c^2 = 0, \text{ o } v = 0.$$

Qui $$\left(\frac{du}{dx}\right) = 2x, \qquad \left(\frac{du}{dy}\right) = 2y,$$

$$\left(\frac{dv}{dx}\right) = 2(x - a), \qquad \left(\frac{dv}{dy}\right) = 2(y - b).$$

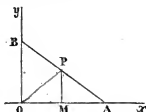
Onde $$x(y-b)-y(x-a)=0;$$
quindi $$ay=bx.$$

Si sostituisca il valore di y in $v=0$, ed abbiamo
$$x^2\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)-2x\left(a+\frac{b^2}{a}\right)+a^2+b^2=c^2;$$
onde $$x=a\pm\frac{ac}{\sqrt{(a^2+b^2)}}.$$

Esaminando si troverà, che se prendiamo il segno superiore nel valore di x otteniamo un valore massimo per u, e se prendiamo il segno inferiore, un minimo. Questo esempio è una soluzione della quistione geometrica, « Trovare i punti sulla circonferenza di un dato cerchio che sono ad una distanza massima o minima da un dato punto. »

218. L'esempio seguente introdurrà il lettore a considerazioni con le quali il procedimento per trovare i valori massimi e minimi può alle volte essere abbreviato.

Per un punto dato P si tira una linea retta, che incontra gli assi Ox ed Oy in A e B rispettivamente; trovare la lunghezza minima che questa linea può avere.



Sia $OM=a$, $MP=b$, $PAO=\theta$.

Allora $$PA=\frac{b}{\operatorname{sen}\theta},$$
$$PB=\frac{a}{\cos\theta}.$$

Si ponga $u=\frac{b}{\operatorname{sen}\theta}+\frac{a}{\cos\theta}$, e dobbiamo trovare il valore minimo di u.

Ora $$\frac{du}{d\theta}=-\frac{b\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}+\frac{a\operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta};$$

quindi $\frac{du}{d\theta}$ svanisce solamente quando $\tan\theta=\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$.

Dalla figura apparisce che facendo θ o tanto piccolo quanto ci piace, o tanto prossimamente eguale ad un angolo retto

quanto ci piace, la linea AB può rendersi tanto grande quanto ci piace. Inoltre, variando θ da 0 a $\frac{\pi}{2}$, vi deve essere un valore di θ che dà alla linea AB la *minima* lunghezza che può avere, e questa *più piccola* lunghezza di AB soddisferà alla definizione di una lunghezza *minima*. E come $\frac{du}{d\theta}$ per un valore di θ tra 0 e $\frac{\pi}{2}$ non può mai cambiare il suo segno eccetto quando $\tan\theta = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$, questo deve essere il valore di θ che dà la lunghezza minima che cerchiamo.

Questo valore di θ dà per la lunghezza minima il valore

$$(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}.$$

In questo esempio è facile vedere pel valore di $\frac{du}{d\theta}$, che esso *muta* di segno dal negativo al positivo quando θ cresce e passa pel valore assegnato; ma in quistioni più complicate è spesso più conveniente di mostrare nella maniera adoperata innanzi, che un massimo o un minimo *deve* necessariamente esistere, ed allora ci risparmiamo la pena di esaminare se il coefficiente differenziale della funzione muta di segno quando svanisce.

219. Il procedimento per trovare i valori massimi e minimi di una funzione implicita può essere esteso al caso nel quale una variabile è legata con più di un'altra variabile, il numero totale delle equazioni essendo minore di un'unità del numero totale delle variabili. Supponiamo, per esempio, le tre equazioni,

$$F(x, y, z, u) = 0,$$
$$F_1(x, y, z, u) = 0,$$
$$F_2(x, y, z, u) = 0;$$

u essendo la variabile di cui si vuol trovare il massimo o minimo valore.

Dalle equazioni date segue che possiamo considerare y, z, ed u funzioni della variabile indipendente x. Quindi

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{dF}{dx}+\dfrac{dF}{dy}\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{dF}{dz}\dfrac{dz}{dx}+\dfrac{dF}{du}\dfrac{du}{dx}=0\\[2mm] \dfrac{dF_1}{dx}+\dfrac{dF_1}{dy}\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{dF_1}{dz}\dfrac{dz}{dx}+\dfrac{dF_1}{du}\dfrac{du}{dx}=0\\[2mm] \dfrac{dF_2}{dx}+\dfrac{dF_2}{dy}\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{dF_2}{dz}\dfrac{dz}{dx}+\dfrac{dF_2}{du}\dfrac{du}{dx}=0\end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots(1).$$

Da queste equazioni possiamo eliminare $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{dz}{dx}$, ed il valore di $\frac{du}{dx}$ che allora otteniamo deve essere messo eguale a zero. O, più semplicemente, possiamo porre $\frac{du}{dx}=0$ in queste equazioni, e poi eliminare $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{dz}{dx}$ dalle equazioni risultanti che sono

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{dF}{dx}+\dfrac{dF}{dy}\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{dF}{dz}\dfrac{dz}{dx}=0\\[2mm] \dfrac{dF_1}{dx}+\dfrac{dF_1}{dy}\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{dF_1}{dz}\dfrac{dz}{dx}=0\\[2mm] \dfrac{dF_2}{dx}+\dfrac{dF_2}{dy}\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{dF_2}{dz}\dfrac{dz}{dx}=0\end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots(2).$$

L'equazione ottenuta eliminando $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{dz}{dx}$, combinata con le equazioni $F=0$, $F_1=0$, $F_2=0$, determinerà x, y, z ed u.

Differenziando di nuovo le equazioni (1), possiamo ottenere $\frac{d^2u}{dx^2}$, e dal segno che i valori di x, y, z, u, già trovati, danno a questa quantità, determiniamo se u è un massimo o un minimo.

220. Supponiamo di avere una funzione di n variabili, le variabili essendo legate da $n-1$ equazioni, e cerchiamo il valore massimo o minimo della funzione. Per esempio, supponiamo tre equazioni

$$F(x, y, z, u)=0, \quad F_1(x, y, z, u)=0, \quad F_2(x, y, z, u)=0,$$

e cerchiamo il massimo o minimo di $f(x, y, z, u)$. In questo

caso, alle equazioni (1) dell'articolo precedente, in cui $\frac{du}{dx}$ non deve essere supposto zero, dobbiamo aggiungere

$$\frac{df}{dx}+\frac{df}{dy}\frac{dy}{dx}+\frac{df}{dz}\frac{dz}{dx}+\frac{df}{du}\frac{du}{dx}=0.$$

Da queste quattro equazioni dobbiamo eliminare $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, e $\frac{du}{dx}$. L'equazione risultante combinata con le date equazioni $F=0$, $F_1=0$, $F_2=0$, determinerà x, y, z, ed u. Formeremo quindi il secondo coefficiente differenziale di $f(x,y,z,u)$ rispetto ad x. Questo conterrà $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$, e $\frac{d^2u}{dx^2}$, i quali dovranno trovarsi differenziando le equazioni (1): dal segno di questo secondo coefficiente differenziale di $f(x,y,z,u)$ si deciderà se la funzione è un massimo o un minimo.

221. Nell'Art. 214 si ottenne per la condizione affinchè $f(x)$ abbia un valore massimo o minimo, che $\varphi'(x)$ muti di segno, e quindi che $\varphi'(x)$ sia zero o infinito. I casi nei quali $\varphi'(x)$ è infinito si presentano raramente, e negli articoli che seguono l'Art. 214 abbiamo considerato sempre che $\varphi'(x)$ *svanisca* quando $\varphi(x)$ è un massimo o un minimo. Aggiungeremo quì una proposizione la quale mostra che secondo il primo concetto dato dei valori massimi e minimi (Art. 209–213), *può* esistere un massimo o un minimo quando il coefficiente differenziale della funzione considerata diviene infinito.

Supponiamo che $\varphi(x)$ sia una tale funzione di x che per $x=a$ alcuno dei coefficienti differenziali di $\varphi(x)$ sia infinito, sicchè $\varphi(a+h)$ non possa svilupparsi secondo le potenze di h col Teorema di Taylor.

Supponiamo che con un procedimento algebrico non soggetto ad eccezione si trovi

$$\varphi(a+h)-\varphi(a)=Ah^{\alpha}+Bh^{\beta}+Ch^{\gamma}+\text{etc.},$$

in cui α, β, γ, etc., non sono necessariamente interi positivi. Se alcuno di questi esponenti è una frazione nei suoi minimi termini con un denominatore pari, allora $\varphi(a-h)-\varphi(a)$ sarà impossibile, e la considerazione dei valori massimi e

minimi diviene inapplicabile. Se nessuno degli esponenti è di questa forma, allora $\varphi(a-h)-\varphi(a)$ sarà una quantità possibile. Ora vi possono essere casi nei quali, prendendo h sufficientemente piccolo, il segno di Ah^α determina il segno di $\varphi(a+h)-\varphi(a)$; per esempio, questo accade se il numero dei termini in $\varphi(a+h)-\varphi(a)$ è finito, e gli esponenti α, β, γ, etc., sono tutti positivi, ed α il minimo. Supponiamo tale caso, e sia α una frazione propria con un numeratore pari; allora $\varphi(a+h)-\varphi(a)$ e $\varphi(a-h)-\varphi(a)$ sono tutte e due positive se A è positivo, e negative se A è negativo, quando h è preso sufficientemente piccolo. Quindi $\varphi(a)$ nel primo caso è un valore minimo di $\varphi(x)$ e nel secondo caso è un valore massimo.

Inoltre, poichè α è una frazione *propria*,

$$\frac{d\varphi(a+h)}{dh} \text{ è infinito quando } h=0,$$

quindi $\varphi'(x)$ è infinito quando $x=a$.

Adunque $\varphi(x)$ *può* essere un massimo quando $\varphi'(x)$ è infinito.

Es. Si supponga

$$\varphi(x)=c+(x-a)^{\frac{2}{3}}+(x-a)^{\frac{4}{3}};$$

onde

$$\varphi(a+h)=c+h^{\frac{2}{3}}+h^{\frac{4}{3}},$$

$$\varphi(a)=c,$$

$$\varphi(a\pm h)-\varphi(a)=h^{\frac{2}{3}}+h^{\frac{4}{3}}.$$

Quindi $\varphi(a+h)$ e $\varphi(a-h)$ sono tutte e due necessariamente maggiori di $\varphi(a)$. Adunque $\varphi(a)$ è un valore minimo di $\varphi(x)$, ed è chiaro che $\varphi'(x)$ è infinito quando $x=a$.

222. *Intorno ad alcuni casi di Massimi e Minimi Geometrici.*

Occasionalmente s'incontrano in Geometria casi di valori massimi e minimi per i quali gli ordinarii procedimenti analitici sembrano essere in difetto, benchè per considerazioni geometriche sia ovvia l'esistenza di massimi e minimi. Il problema seguente introdurrà la difficoltà che ci proponiamo di spiegare. « Trovare la perpendicolare massima e la minima condotta dal fuoco sulla tangente di un'ellisse, la perpendicolare essendo espressa in termini del raggio vettore. »

L'equazione che dà la perpendicolare in termini del raggio vettore è

$$p^2 = \frac{b^2 r}{2a - r};$$

onde $\quad p\frac{dp}{dr} = \frac{ab^2}{(2a-r)^2}$, che deve essere $=0$.

Ora ciò può essere solamente soddisfatto da $r = \pm\infty$, i quali valori non sono ammissibili, mentre conosciamo dalla Geometria che p *ha* un valore massimo $= a(1+e)$, ed un valore minimo $= a(1-e)$.

La ragione per la quale non troviamo questi valori col precedente ordinario procedimento analitico è la seguente. Nella teoria ordinaria dei massimi o minimi la funzione si considera espressa in termini di una variabile *indipendente* la quale può prendere tutt'i valori possibili. Ora nell'esempio precedente r non è una variabile *indipendente;* i suoi valori sono limitati a quelli trovati attribuendo *tutt'i valori possibili a* θ nell'equazione

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1 + e\cos\theta}.$$

Poichè r è così una funzione di θ, possiamo considerare p che è una funzione di r essere anche una funzione di θ. Quindi $\frac{dp}{d\theta} = \frac{dp}{dr}\frac{dr}{d\theta}$, e ciò può rendersi $=0$ se possiamo avere $\frac{dr}{d\theta} = 0$. Questo si può fare, e così p ha un valore massimo o minimo nello stesso tempo che r.

Simili osservazioni si applicano ad altri esempii. Così generalmente, se $y = \varphi(x)$, in cui x non è suscettibile di tutt'i valori possibili, può essere impossibile di porre $\frac{dy}{dx} = 0$, e così non vi potrà essere, apparentemente, nessun valore massimo o minimo di y. Ma in questo caso, se x può essere espressa in termini di una variabile θ che può prendere tutt'i valori possibili, dobbiamo porre $\frac{dx}{d\theta} = 0$, il che dà $\frac{dy}{d\theta} = 0$, e così determiniamo valori simultanei massimi o minimi di x ed y.

Es. Trovare la massima e la minima lunghezza della retta condotta ad un circolo da un dato punto esterno.

Si prenda l'asso delle x che passi pel centro del circolo e pel dato punto esterno, il primo essendo l'origine. Sia

$a =$ al raggio del circolo,

$c =$ alla distanza del punto dato (sia A) dal centro,

x sia l'ascissa di un punto P del circolo; allora $AP^2 = c^2 + a^2 - 2cx.$

Il coefficiente differenziale di questa espressione rispetto ad x è $-2c$, il quale non può svanire. Ma se poniamo $x = a \cos\theta$,

$$AP^2 = c^2 + a^2 - 2ac\cos\theta,$$

$$\frac{d.AP^2}{d\theta} = 2ac \operatorname{sen}\theta;$$

e $\theta = 0$, $\theta = \pi$, danno rispettivamente i valori minimo e massimo di AP^2.

In questo esempio la difficoltà non apparirebbe se scegliessimo i nostri assi in modo che x non sia un massimo simultaneamente con AP. Chiamando b l'ordinata di A, c l'ascissa di A, ed a il raggio del circolo, avremo

$$AP^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2b\sqrt{(a^2 - x^2)} - 2cx,$$

che ha i suoi valori massimo e minimo, quando

$$x = \pm\frac{ac}{\sqrt{(b^2 + c^2)}}.$$

Il seguente è un caso analogo. Trovare quei diametri coniugati di un' ellisse di cui la somma è un massimo o un minimo. Se r ed r' siano due diametri coniugati qualunque, allora

$u = r + r'$ deve essere un massimo o un minimo,

mentre $r^2 + r'^2 = a^2 + b^2 = c^2$, supponiamo;

così $u = r + \sqrt{(c^2 - r^2)},$

$$\frac{du}{dr} = 1 - \frac{r}{\sqrt{(c^2 - r^2)}}.$$

Se $\frac{du}{dr}$ si pone $= 0$, otteniamo $r^2 = \frac{c^2}{2}$, e quindi $r'^2 = \frac{c^2}{2}$. Questo ci dà i *diametri conjugati eguali,* la somma dei quali conosciamo essere un massimo. Se esprimiamo r, e per conseguenza r', in termini di una variabile che possa prendere

tutt'i valori possibili, come per esempio φ l'inclinazione di r sull'asse maggiore, otterremo un risultato addizionale. Infatti $\frac{du}{d\varphi}=\frac{du}{dr}\frac{dr}{d\varphi}$, e quindi, se $\frac{dr}{d\varphi}=0$, abbiamo anche $\frac{du}{d\varphi}=0$. Ma $\frac{dr}{d\varphi}$ rende r un massimo o un minimo, e così otteniamo i *due assi principali*, la di cui somma è un minimo. Con un metodo differente, avremmo potuto ottenere prima il valore minimo di $r+r'$. Infatti essendo

$$r^2+r'^2=a^2+b^2,$$

ed

$$rr'\operatorname{sen}\theta=ab,$$

abbiamo

$$(r+r')^2=a^2+b^2+\frac{2ab}{\operatorname{sen}\theta},$$

in cui θ è l'angolo tra r ed r'. Si differenzii rispetto a θ, e si ha

$$-\frac{2ab\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}=0,$$

onde $\theta=\frac{\pi}{2}$; questo dà il valore minimo come sopra; $\frac{d\theta}{d\varphi}=0$ ci darebbe un secondo risultato, che sarebbe il massimo.

L'articolo precedente è stato preso quasi letteralmente dal 3.° vol. del *Cambridge Mathematical Journal*, p. 237. Il problema seguente fornirà un esercizio. Trovare la lunghezza massima o minima della retta condotta dall'estremità dell'asse minore di un'ellisse ad incontrare la curva. Se x, y, siano le coordinate del punto in cui una retta tirata dall'estremità dell'asse minore incontra la curva, la lunghezza della linea può essere espressa come una funzione di x o di y; così due soluzioni possono essere ottenute e paragonate.

Nella risoluzione di alcuni degli esempii sui massimi e minimi si richiederanno i seguenti risultati; essi possono essere stabiliti per mezzo del Calcolo Integrale.

Il volume di un cilindro retto si trova moltiplicando l'area della sua base per l'altezza.

La superficie convessa di un cilindro retto si trova moltiplicando il perimetro della sua base per l'altezza.

Il volume di un cono retto è un terzo del prodotto della sua base per l'altezza.

La superficie convessa di un cono retto a base circolare è un mezzo del prodotto del suo lato pel perimetro della sua base.

Se r è il raggio di una sfera il suo volume è $\frac{4\pi r^3}{3}$ e la sua superficie $4\pi r^2$.

ESEMPII DI MASSIMI E MINIMI.

1. Se $u = x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 1$, trovare il suo valore massimo ed il minimo. $x = 1$ dà un massimo, $x = 3$ un minimo, $x = 0$ nè l'uno nè l'altro.

2. Se $u = x^3 - 9x^2 + 15x - 3$, trovare il suo valore massimo ed il minimo. 4 è un massimo, e -28 un valore minimo.

3. Se $u = x^3 - 3x^2 + 6x + 7$, mostrare che esso non ha nè un valore massimo nè un minimo.

4. Se $u = x^3 - 3x^2 + 3x + 7$, è esso un massimo o un minimo quando $x = 1$? Nè l'uno nè l'altro.

5. $u = (x - 1)^4 (x + 2)^3$.
Massimo quando $x = -\frac{5}{7}$, minimo quando $x = 1$, nè l'uno nè l'altro quando $x = -2$.

6. $u = (1 + x)^{\frac{2}{3}} (7 - x)^2$. $x = 0$ rende u un minimo, $x = 1$ rende u un massimo, ed $x = 7$ un minimo.

7. $u = 3x^5 - 125x^3 + 2160x$.
Un massimo quando $x = -4$, e quando $x = 3$; ed un minimo quando $x = -3$ e quando $x = 4$.

8. $u = \dfrac{1 - x + x^2}{1 + x - x^2}$. $x = \frac{1}{2}$ rende u un minimo.

9. $u = \dfrac{x^2 - 7x + 6}{x - 10}$. Se $x = 4$, u è un massimo, e se $x = 16$, un minimo.

10. Se $\dfrac{du}{dx} = x^3 (x - 1)^2 (x - 2)^3 (x - 3)^4$, trovare quali valori di x rendono u un massimo o un minimo.
$x = 0$ dà un massimo, ed $x = 2$ un minimo.

11. Se $\frac{du}{dx}=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3$, trovare quando u è un massimo o un minimo.

$x=1$ dà un massimo, ed $x=3$ un minimo.

12. $u=x(a+x)^2(a-x)^3$.

Un massimo quando $x=\frac{a}{3}$, e quando $x=-a$, ed un minimo quando $x=-\frac{a}{2}$.

13. $u=\frac{(a-x)^3}{a-2x}$.

Un minimo quando $x=\frac{a}{4}$.

14. $u=b+c(x-a)^{\frac{2}{3}}$.

Un minimo quando $x=a$.

15. $u=\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{a-x}$.

Un minimo quando $x=\frac{a^2}{a+b}$, ed un massimo quando $x=\frac{a^2}{a-b}$.

16. $u=\frac{3x^2-a^2}{(a^2+x^2)^3}$.

Un minimo quando $x=0$, ed un massimo quando $x=\pm a$.

17. $u=(mx+na)^{m+n}-(m+n)^{m+n}x^m a^n$.

Un minimo quando $x=a$.

18. $u=\frac{x}{1+x\tan x}$.

Un massimo quando $x=\cos x$.

19. $u=x^{\frac{1}{x}}$.

Un massimo quando $x=e$.

20. $u=\frac{\tan^3 x}{\tan 3x}$.

Un massimo quando $x=\frac{\pi}{8}$, etc.

21. Mostrare che sen $x\,(1+\cos x)$ è un massimo quando $x=\frac{\pi}{3}$.

22. Se $xy(y-x)=2a^3$, trovare se y ha un massimo o un minimo valore.

Un minimo quando $x=a$.

23. Se $3a^2y^2+xy^3+4ax^3=0$, mostrare che quando $x=\frac{3a}{2}$, y ha un valore massimo, cioè $-3a$, il valore di $\frac{d^2y}{dx^2}$ essendo allora $-\frac{8}{5a}$.

24. Se $x^4+2ax^2y-ay^3=0$, mostrare che quando $x=\pm a$, $y=-a$ ed è un minimo. Inoltre, quando $y=-\frac{8a}{9}$, x è sì un massimo che un minimo, ed è $=\pm\frac{4a\sqrt{6}}{9}$.

25. Se $2x^5+3ay^4-x^2y^3=0$, $x=a.5^{\frac{4}{3}}$ rende y un minimo, ed $=a.5^{\frac{5}{3}}$.

26. Trovare il massimo ed il minimo valore di y, quando

$$y^4-4c^2yx+x^4=0.$$

$$x=c\sqrt[8]{3} \text{ rende } y=c\sqrt[8]{(27)} \text{ un massimo.}$$

$$x=-c\sqrt[8]{3} \text{ rende } y=-c\sqrt[8]{(27)} \text{ un minimo.}$$

27. Una persona trovandosi in una barca 3 miglia lontano dal punto più vicino del lido, desidera di pervenire nel più breve tempo ad un luogo 5 miglia lontano da quel punto lungo la costa; supposto che egli possa percorrere camminando 5 miglia ad ora, ma remigare solamente alla ragione di 4 miglia ad ora, si cerca il posto dove deve approdare.

Un miglio lontano dal luogo dove vuol prevenire.

28. I lati di un rettangolo sono a e b; il massimo rettangolo che si può descrivere in modo che i suoi lati passino per i vertici del dato rettangolo è un quadrato, il lato del quale è $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$.

29. Se un pezzo rettangolare di cartone, i lati del quale sono a e b, abbia un quadrato tagliato in ciascun

angolo, trovare il lato del quadrato in modo che il rimanente possa formare una scatola di massimo volume.

$$\text{Il lato} = \frac{a+b-\sqrt{(a^2-ab+b^2)}}{6}.$$

— 30. Una finestra Normanna consiste di un rettangolo sormontato da un semicerchio. Dato il perimetro, si cerca l'altezza e la larghezza della finestra quando la quantità di luce introdotta è un massimo.

Il raggio del semicerchio deve eguagliare l'altezza del rettangolo.

— 31. Mostrare che l'altezza del massimo triangolo equilatero che può essere circoscritto ad un dato triangolo, è

$$\{a^2+b^2-2ab\cos(\tfrac{1}{3}\pi+C)\}^{\frac{1}{2}}.$$

— 32. Una linea retta condotta per un punto dato P, incontra gli assi Ox ed Oy in A e B rispettivamente (si vegga la fig. nell'Art. 218); trovare la posizione della retta,

(1) Quando AB è un minimo.
(2) Quando $OA+OB$ è un minimo.
(3) Quando $OA\times OB$ è un minimo.
(4) Quando $OA+OB+AB$ è un minimo.
(5) Quando $OA\times OB\times AB$ è un minimo.
(6) Quando OA^n+OB^n è un minimo.

Dinoti θ l'angolo PAO, allora dobbiamo avere

(1) $\tan\theta=\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{3}}$,

(2) $\tan\theta=\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2}}$,

(3) $\tan\theta=\frac{b}{a}$,

(4) $\tan\theta=\frac{b+\sqrt{(2ab)}}{a+\sqrt{(2ab)}}$,

(5) $2a\tan^3\theta-b\tan^2\theta+a\tan\theta-2b=0$,

(6) $\tan\theta=\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}$.

33. Essendo dati un angolo di un triangolo ed il lato opposto, dimostrare che l'area sarà un massimo quando il dato angolo è equidistante dagli altri angoli.

34. Essendo dati un angolo di un quadrilatero ed i due lati opposti ad esso, dimostrare che l'area sarà un massimo quando il dato angolo è equidistante dagli altri angoli.

Segue dall'esempio precedente che i due lati i quali contengono l'angolo dato debbono essere eguali per ottenere un'area massima; poichè se essi non fossero eguali l'area del quadrilatero sarebbe aumentata cambiando questi due lati in due lati eguali.

35. Trovare la minima ellisse che può essere circoscritta ad un dato parallelogrammo, e mostrare che la sua area sta a quella del parallelogrammo come $\pi : 2$.

36. La minima tangente ad un'ellisse intercetta tra gli assi è divisa nel punto di contatto in due parti, le quali sono eguali ai semiassi rispettivamente.

37. Trovare l'area e la posizione del massimo triangolo che può essere iscritto in un dato segmento parabolico, avendo la corda del segmento per sua base.

38. Trovare il minimo triangolo che può essere circoscritto ad una data ellisse, avendo un lato parallelo all'asse maggiore ed avendo gli altri lati eguali.

L'altezza è tre volte il semiasse minore.

39. Dimostrare che di tutt' i settori circolari descritti con lo stesso perimetro, il settore di massima area è quello nel quale l'arco circolare è doppio del raggio.

40. Una corda PSP' è condotta pel fuoco S di un'ellisse, ed i punti P, P', sono congiunti con l'altro fuoco H: determinare quando l'area PHP' è un massimo.

Sia e l'eccentricità dell'ellisse e θ l'angolo tra la corda PSP' e l'asse maggiore dell'ellisse. Se $2e^2$ è maggiore di 1 il massimo è determinato da $\cos^2\theta = 2 - \frac{1}{e^2}$, e $\theta = \frac{\pi}{2}$ dà un minimo; se $2e^2$ non è maggiore di 1 il massimo si ha quando $\theta = \frac{\pi}{2}$ e non vi è alcun minimo.

41. Trovare la lunghezza della più piccola corda normale in una parabola, e dimostrare che essa interseca la curva più vicino al vertice di ogni altra corda normale.

Se $4a$ è il lato retto della parabola la lunghezza richiesta è $6a\sqrt{3}$.

42. Due navi navigano uniformemente con velocità u, v lungo linee inclinate sotto un angolo θ; mostrare che se a, b sono le loro distanze ad un certo tempo dal punto d'intersezione dei corsi, la minima distanza delle navi è eguale ad

$$\frac{(av-bu)\operatorname{sen}\theta}{(u^2+v^2-2uv\cos\theta)^{\frac{1}{2}}}.$$

43. Di tutte le linee condotte dal vertice di una data ellisse alla circonferenza del cerchio circoscritto, determinare quella per la quale la porzione intercetta tra le due curve è un massimo.

Se θ è l'inclinazione della linea all'asse maggiore dell'ellisse, ed e l'eccentricità dell'ellisse,

$$2e^2\cos^2\theta = 3 - e^2 - \sqrt{\{(1-e^2)(9-e^2)\}}.$$

44. Se un'ellisse è descritta che tocca un dato semicerchio ed il suo diametro simmetricamente, la sua area quando è un massimo sarà $\frac{2\pi r^2}{3\sqrt{3}}$, r essendo il raggio del cerchio.

45. Un'ellisse è iscritta in un triangolo isoscele, ed ha uno dei suoi assi coincidente in direzione con la linea che bisega l'angolo al vertice del triangolo; mostrare che quest'asse è due-terzi dell'altezza del triangolo quando l'area dell'ellisse è un massimo.

46. Qual settore deve tagliarsi da un dato circolo, affinchè il rimanente possa formare la superficie curva di un cono di massimo volume?

L'angolo del settore deve essere $\frac{2\pi(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{\sqrt{3}}$.

47. Due corde focali sono tirate in un'ellisse ad angoli retti, trovare quando la loro somma è un massimo, e quando è un minimo.

[Nei problemi seguenti i coni ed i cilindri sono supposti essere coni e cilindri *retti* a basi *circolari.*]

48. Determinare il massimo cilindro che può essere iscritto in un dato cono.

Se b è l'altezza del cono, ed a il raggio della sua base, il volume del cilindro è $\frac{4}{27}\pi a^2 b$.

49. Determinare il cilindro di massima superficie convessa che può essere iscritto nello stesso cono.

La superficie $= \frac{\pi b a}{2}$.

50. Determinare il cilindro, in modo che la sua superficie *totale* sia un massimo.

Il raggio del cilindro $= \frac{ab}{2(b-a)}$; ma per la natura del problema questo deve essere minore di a; ciò conduce alla condizione che b deve essere maggiore di $2a$ per ottenere un massimo. Se b non è maggiore di $2a$ la superficie totale del cilindro *cresce continuamente* al crescere del raggio, e non vi è *massimo*.

51. Determinare il massimo cilindro che può essere iscritto in una data sfera.

Se r è il raggio della sfera l'altezza del cilindro è $\frac{2r}{\sqrt{3}}$.

52. Determinare il cilindro iscritto in una data sfera che ha la massima superficie convessa.

Altezza $= r\sqrt{2}$.

53. Determinare il cilindro in modo che la sua superficie *totale* sia un massimo.

$$\text{Altezza} = r\left\{2\left(1 - \frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

54. Determinare il massimo cono che può essere iscritto in una data sfera.

Altezza $= \frac{4}{3} r$.

55. Determinare il cono di massima superficie convessa.

Altezza $= \frac{4}{3} r$.

56. Determinare il cono in modo che la sua superficie *totale* sia un massimo.

Altezza $= \frac{r}{16}\left(23 - \sqrt{17}\right)$.

57. Dato il volume di un cilindro, trovare la sua altezza ed il raggio quando la somma delle aree della sua superficie convessa e di una base è un minimo.

L'altezza è uguale al raggio.

58. Di tutt'i coni circoscritti ad una data sfera, trovare quello di minimo volume.

Il seno del semi-angolo verticale deve essere $\frac{1}{3}$.

59. Una serie di coni ha i loro lati della stessa lunghezza; trovare quello che ha il massimo volume.

La tangente del semi-angolo verticale $= \sqrt{2}$.

60. Trovare la posizione della corda che passa per un dato punto interno alla parabola, e taglia dalla parabola la minima area possibile.

61. Trovare un punto in un'ellisse dal quale, tirando le perpendicolari sopra due dati diametri coniugati, la somma dei loro quadrati sia un massimo.

62. Dimostrare che $\varphi\{f(x)\}$ è necessariamente un massimo o un minimo quando $f(x)$ è un massimo.

CAPITOLO XIV.

SVILUPPO DI UNA FUNZIONE DI DUE VARIABILI INDIPENDENTI.

223. Sia $u=\varphi(x, y)$ una funzione di due variabili indipendenti, e supponiamo che $\varphi(x+h, y+k)$ debba svilupparsi secondo le potenze ascendenti di h e k. Si ponga

$$h = \alpha h', \; k = \alpha k',$$

allora $$\varphi(x+h, y+k) = \varphi(x+\alpha h', y+\alpha k');$$

l'ultima espressione si può considerare una funzione di α, e dinotare con $f(\alpha)$. Pel teorema di Maclaurin,

$$f(\alpha) = f(0) + f'(0)\cdot\alpha + f''(0)\cdot\frac{\alpha^2}{1.2} + \text{etc.};$$

mostreremo ora come i coefficienti differenziali di $f(\alpha)$ si possono esprimere convenientemente. Si supponga

$$x+\alpha h' = x', \quad y+\alpha k' = y';$$

allora $f(\alpha)$ sta per $\varphi(x', y')$ e poiche sì x' che y' contiene α, abbiamo per l'Art. 169,

$$f'(\alpha) = \frac{d\varphi(x', y')}{dx'}\frac{dx'}{d\alpha} + \frac{d\varphi(x', y')}{dy'}\frac{dy'}{d\alpha}$$

$$= h'\frac{d\varphi(x', y')}{dx'} + k'\frac{d\varphi(x', y')}{dy'}.$$

Inoltre per l'Art. 63,

$$\frac{d\varphi(x', y')}{dx} = \frac{d\varphi(x', y')}{dx'}\cdot\frac{dx'}{dx};$$

ma $$\frac{dx'}{dx} = 1;$$

quindi $$\frac{d\varphi(x', y')}{dx'} = \frac{d\varphi(x', y')}{dx}.$$

Similmente $$\frac{d\varphi(x', y')}{dy'} = \frac{d\varphi(x', y')}{dy};$$

onde $$f'(\alpha) = h' \frac{d\varphi(x', y')}{dx} + k' \frac{d\varphi(x', y')}{dy},$$

che, per brevità, può essere scritta

$$f'(\alpha) = h' \frac{df}{dx} + k' \frac{df}{dy}.$$

Similmente,

$$f''(\alpha) = h'^2 \frac{d^2f}{dx^2} + 2h'k' \frac{d^2f}{dx\,dy} + k'^2 \frac{d^2f}{dy^2},$$

$$f'''(\alpha) = h'^3 \frac{d^3f}{dx^3} + 3h'^2k' \frac{d^3f}{dx^2\,dy} + 3h'k'^2 \frac{d^3f}{dx\,dy^2} + k'^3 \frac{d^3f}{dy^3}.$$

Così la legge di formazione dei coefficienti differenziali successivi di $f(\alpha)$ è ovvia. Quando $\alpha = 0, f(\alpha)$ diviene u; quindi abbiamo

$$f(0) = u,$$

$$f'(0) = h' \frac{du}{dx} + k' \frac{du}{dy},$$

$$f''(0) = h'^2 \frac{d^2u}{dx^2} + 2h'k' \frac{d^2u}{dx\,dy} + k'^2 \frac{d^2u}{dy^2},$$

etc. . . . .

Si riponga h per $\alpha h'$, e k per $\alpha k'$; allora

$$\varphi(x + h, y + k) = u + h \frac{du}{dx} + k \frac{du}{dy}$$

$$+ \frac{1}{1.2} \left\{ h^2 \frac{d^2u}{dx^2} + 2hk \frac{d^2u}{dx\,dy} + k^2 \frac{d^2u}{dy^2} \right\}$$

$$+ \frac{1}{\underline{|3}} \left\{ h^3 \frac{d^3u}{dx^3} + 3h^2k \frac{d^3u}{dx^2\,dy} + 3hk^2 \frac{d^3u}{dx\,dy^2} + k^3 \frac{d^3u}{dy^3} \right\}$$

$$+ \text{etc.}$$

224. Se desideriamo terminare la serie per $\varphi(x+h, y+k)$ dopo un numero finito di termini, possiamo porre lo sviluppo di $f(\alpha)$ sotto la forma

$$f(\alpha)=f(0)+f'(0)\cdot\alpha+f''(0)\cdot\frac{\alpha^2}{1.2}+\ldots+f^{n-1}(0)\cdot\frac{\alpha^{n-1}}{\lfloor n-1}$$
$$+f^n(\theta\alpha)\cdot\frac{\alpha^n}{\lfloor n};$$

e da questa si può ottenere per $\varphi(x+h, y+k)$ la forma richiesta. Per esempio, se $n=3$,

$$\varphi(x+h, y+k)=u+h\frac{du}{dx}+k\frac{du}{dy}$$
$$+\frac{1}{1.2}\left\{h^2\frac{d^2u}{dx^2}+2hk\frac{d^2u}{dx\,dy}+k^2\frac{d^2u}{dy^2}\right\}$$
$$+\frac{1}{\lfloor 3}\left\{h^3\frac{d^3v}{dx^3}+3h^2k\frac{d^3v}{dx^2\,dy}+3hk^2\frac{d^3v}{dx\,dy^2}+k^3\frac{d^3v}{dy^3}\right\},$$

in cui v sta per $\varphi(x+\theta h, y+\theta k)$.

225. Nella formola stabilita nell'Art. 223, si ponga $x=0$, ed $y=0$; allora

$$\varphi(h,k)=u_0+h\frac{du_0}{dx}+k\frac{du_0}{dy}$$
$$+\frac{1}{1.2}\left\{h^2\frac{d^2u_0}{dx^2}+2hk\frac{d^2u_0}{dx\,dy}+k^2\frac{d^2u_0}{dy^2}\right\}$$
$$+\text{etc.},$$

in cui u_0, $\frac{du_0}{dx}$, $\frac{du_0}{dy}$, $\frac{d^2u_0}{dx^2}$, etc. dinotano i valori di u, $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$, $\frac{d^2u}{dx^2}$, etc. quando in queste espressioni poniamo $x=0$, ed $y=0$. Se mutiamo h e k in x ed y rispettivamente nella formola precedente, abbiamo

$$\varphi(x,y)=u_0+x\frac{du_0}{dx}+y\frac{du_0}{dy}$$
$$+\frac{1}{1.2}\left\{x^2\frac{d^2u_0}{dx^2}+2xy\frac{d^2u_0}{dx\,dy}+y^2\frac{d^2u_0}{dy^2}\right\}$$
$$+\text{etc.},$$

x ed y essendo messi eguali a zero in u_0 e nei suoi coefficienti differenziali dopo che le differenziazioni sono state eseguite.

In questo modo la formola di Maclaurin è estesa allo sviluppo delle funzioni di due variabili.

226. L'espressione per l'n^{mo} coefficiente differenziale di $f(\alpha)$, nell'Art. 223, è

$$h'^n \frac{d^n f}{dx^n} + n h'^{n-1} k' \frac{d^n f}{dx^{n-1}\,dy} + \frac{n(n-1)}{1.2} h'^{n-2} k'^2 \frac{d^n f}{dx^{n-2}\,dy^2} \dots + k'^n \frac{d^n f}{dy^n},$$

che, per abbreviazione, si può scrivere

$$\left(h' \frac{d}{dx} + k' \frac{d}{dy}\right)^n f$$

purchè interpetriamo questa espressione così: $\left(h' \frac{d}{dx} + k' \frac{d}{dy}\right)^n$ si deve sviluppare col teorema del binomio come se $h' \frac{d}{dx}$ fosse un termine e $k' \frac{d}{dy}$ l'altro termine: quando lo sviluppo è effettuato, ciascuno dei termini che si ottiene come

$$\left(h' \frac{d}{dx}\right)^{n-r} \left(k' \frac{d}{dy}\right)^r f$$

deve essere rimpiazzato da $h'^{n-r} k'^r \frac{d^n f}{dx^{n-r}\,dy^r}$. Se adottiamo questa abbreviazione il risultato dell'Art. 223 si può scrivere

$$\varphi(x+h, y+k) = u + \left(h \frac{d}{dx} + k \frac{d}{dy}\right) u + \frac{1}{1.2} \left(h \frac{d}{dx} + k \frac{d}{dy}\right)^2 u$$
$$+ \dots\dots + \frac{1}{\lfloor n-1} \left(h \frac{d}{dx} + k \frac{d}{dy}\right)^{n-1} u + \frac{1}{\lfloor n} \left(h \frac{d}{dx} + k \frac{d}{dy}\right)^n v,$$

in cui $u = \varphi(x, y)$, e $v = \varphi(x + \theta h, y + \theta k)$.

Per l'Art. 107 l'ultimo termine dello sviluppo può, se ci piace, essere rimpiazzato da

$$\frac{1}{\lfloor n-1} (1-\theta)^{n-1} \left(h \frac{d}{dx} + k \frac{d}{dy}\right)^n v.$$

I metodi quì esposti per lo sviluppo di una funzione di due variabili indipendenti si possono immediatamente estendere allo sviluppo di una funzione di più di due variabili indipendenti.

ESEMPII DIVERSI.

1. Mostrare che se x e c sono positivi

$$2 \log \frac{x}{c+x} + \frac{c}{x} + \frac{c}{c+x}$$

decresce al crescere di x.

2. Mostrare che se x e c sono positivi

$$\left(\frac{x}{c+x}\right)^{c+2x}$$

cresce al crescere di x.

3. Se $u = (x-3)e^{2x} + 4xe^x + x + 3$ mostrare che $\frac{d^2u}{dx^2}$, $\frac{du}{dx}$, ed u sono positivi per tutt'i valori positivi di x.

4. Mostrare che per i valori positivi di x l'espressione

$$\frac{e^{2x}(x-2) + e^x(x+2)}{(e^x-1)^3}$$

diminuisce al crescere di x, e che il suo massimo valore è $\frac{1}{6}$.

5. Dimostrare la seguente espressione approssimata quando x è piccolo,

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = e\left\{1 - \frac{x}{2} + \frac{11x^2}{24} - \frac{7x^3}{16}\right\}.$$

6. Valutare $\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}$ quando $x = 0$.

Risultato. $-\frac{e}{2}$.

7. Mostrare che quando x è infinito

$$x\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - ex^2 \log\left(1+\frac{1}{x}\right) = 0.$$

8. Trovare il valore quando x è infinito di

$$8x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - 8ex^3 \log\left(1+\frac{1}{x}\right).$$

Risultato. e.

9. Valutare $\dfrac{\frac{\pi}{4} - \tan^{-1} x}{x^n - e^{sen\,(log\, x)}}$ quando $x = 1$.

10. Valutare $\dfrac{\log\left(\cot\frac{x}{2}\right)}{\cot x + \log x}$ quando $x = 0$.

11. Valutare $\dfrac{\sec^n x}{e^{\tan x}}$ quando $x = \dfrac{\pi}{2}$.

12. Valutare $\dfrac{\tan nx - \tan mx}{\operatorname{sen}(n^2x - m^2x)}$,

(1) quando $x = 0$, (2) quando $n = m$.

13. Nell'equazione $f(x+h) - f(x) = hf'(x + \theta h)$, mostrare che se $f''(x)$ non è zero il valore limite di θ quando h diminuisce indefinitamente è $\frac{1}{2}$; inoltre mostrare che se $f^r(x)$ è il primo dei coefficienti differenziali $f''(x)$, $f'''(x)$,... che non è zero, il valore limite di θ quando h diminuisce indefinitamente è

$$\left(\frac{1}{r}\right)^{\frac{1}{r-1}}.$$

14. Nell'equazione $f(x+h) - f(x) = hf'(x + \theta h)$ mostrare che se θ è lo stesso per tutt'i valori di h, esso deve eguagliare $\frac{1}{2}$ ed $f''(x)$ deve essere costante.

15. Cambiare la variabile indipendente da z ad x nell'equazione

$$z^2 \frac{d^2y}{dz^2} + z\frac{dy}{dz} - 1 = (\log z)^2 \left\{ z^2 \frac{d^2y}{dz^2} + z\frac{dy}{dz} \right\},$$

in cui $z = e^{sen\, x}$.

Risultato. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \tan x \dfrac{dy}{dx} = 1.$

16. Trasformare l'espressione

$$\left\{\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{du}{dy}\right)^2 + \left(\frac{du}{dz}\right)^2\right\}\left\{x\frac{du}{dx} + y\frac{du}{dy} + z\frac{du}{dz}\right\}^{-2}$$

in una nella quale r, θ, φ siano le variabili indipendenti essendo

$$x = r \operatorname{sen}\theta \cos\varphi, \quad y = r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi, \quad z = r\cos\theta.$$

17. Se x, y e ξ, η siano le coordinate dello stesso punto riferito a due sistemi di coordinate rettangolari, mostrare che

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}\frac{d^2\varphi}{dy^2} - \left(\frac{d^2\varphi}{dx\,dy}\right)^2 = \frac{d^2\varphi}{d\xi^2}\frac{d^2\varphi}{d\eta^2} - \left(\frac{d^2\varphi}{d\xi\,d\eta}\right)^2.$$

18. Mostrare che $x^2 + x\operatorname{sen}x + 4\cos x$ è un minimo quando $x = 0$.

19. CQ è la perpendicolare dal centro C di un'ellisse sulla tangente in un punto P; trovare il massimo valore di PQ.

Risultato. $a - b$.

20. Una linea retta condotta dall'estremità dell'asse minore di un'ellisse sega l'asse maggiore in Q e la curva in P; da P si tira sull'asse maggiore l'ordinata PN; trovare quando l'area PQN è un massimo.

Risultato. $PN = \frac{b}{4}(\sqrt{17} - 1)$.

CAPITOLO XV.

VALORI MASSIMI E MINIMI DI UNA FUNZIONE DI DUE VARIABILI INDIPENDENTI.

227. Def. Una funzione $\varphi(x,y)$ di due variabili indipendenti si dice di avere un valore *massimo* quando $\varphi(x+h, y+k)$ è *minore* di $\varphi(x,y)$ per tutt'i valori di h e k, positivi o negativi, compresi tra zero e certi limiti finiti comunque piccoli. La funzione si dice di avere un *minimo* valore se $\varphi(x+h, y+k)$ è *maggiore* di $\varphi(x,y)$ per tutti i suddetti valori di h e k.

228. *Investigare le condizioni affinchè una funzione di due variabili indipendenti possa avere un valore massimo o minimo.*

Sia
$$u = \varphi(x, y),$$
$$v = \varphi(x + \theta h, y + \theta k);$$
allora, per l'Art. 226,
$$\varphi(x+h, y+k) = u + h\frac{du}{dx} + k\frac{du}{dy} + R,$$
in cui
$$R = \frac{1}{1.2}\left\{h^2\frac{d^2v}{dx^2} + 2hk\frac{d^2v}{dx\,dy} + k^2\frac{d^2v}{dy^2}\right\}.$$

Ora, prendendo h e k sufficientemente piccoli, possiamo sempre rendere R minore di $h\frac{du}{dx} + k\frac{du}{dy}$, e quindi il segno di $\varphi(x+h, y+k) - \varphi(x,y)$ dipenderà da quello di $h\frac{du}{dx} + k\frac{du}{dy}$, e cambierà per conseguenza cambiando quelli di h e k; è impossibile quindi che $\varphi(x, y)$ abbia un valore massimo o minimo a meno che sia
$$h\frac{du}{dx} + k\frac{du}{dy} = 0.$$

Poichè le quantità h e k sono *indipendenti*, dobbiamo avere

$$\frac{du}{dx}=0, \quad \frac{du}{dy}=0.$$

Si trovino i valori di x ed y da queste equazioni, e siano $x=a$, $y=b$; i valori di $\frac{d^2u}{dx^2}$, $\frac{d^2u}{dx\,dy}$, $\frac{d^2u}{dy^2}$, quando si assegnano questi valori ad x ed y, siano dinotati con A, B, C, rispettivamente. Abbiamo allora per l'Art. 226,

$$\varphi(a+h, b+k)-\varphi(a, b)=\frac{1}{1.2}\left\{Ah^2+2Bhk+Ck^2\right\}+R_1,$$

in cui $R_1=\frac{1}{\underline{|3}}\left\{h^3\frac{d^3v}{dx^3}+3h^2k\frac{d^3v}{dx^2dy}+3hk^2\frac{d^3v}{dx\,dy^2}+k^3\frac{d^3v}{dy^3}\right\}$,

x essendo posto $=a$, ed $y=b$, dopo che le differenziazioni sono state eseguite.

Il segno di $\varphi(a+h, b+k)-\varphi(a, b)$, quando h e k sono presi sufficientemente piccoli, dipenderà da quello di

$$Ah^2+2Bhk+Ck^2,$$

o di

$$\frac{k^2}{A}\left\{\left(A\frac{h}{k}+B\right)^2+AC-B^2\right\}.$$

Se $AC-B^2$ è negativa, sarà possibile, attribuendo un conveniente valore ad $\frac{h}{k}$, di annullare l'ultima espressione e di mutare il suo segno; ed allora $\varphi(a, b)$ non è nè un massimo nè un minimo valore di $\varphi(x, y)$. Quindi *generalmente* dobbiamo avere $AC-B^2$ *positiva* come una condizione per l'esistenza di un massimo o di un minimo. In questo caso A e C avranno lo stesso segno, ed $Ah^2+2Bhk+Ck^2$ avrà lo stesso segno di A e C; e se questo segno è *positivo*, $\varphi(a, b)$ è un valore *minimo* di $\varphi(x, y)$, se *negativo*, $\varphi(a, b)$ è un valore *massimo*.

Diciamo che *generalmente* $AC-B^2$ deve essere positiva; poichè, in fatti, vi *può essere* un valore massimo o minimo quando $AC-B^2=0$, come procediamo a mostrare.

229. *Investigare le condizioni addizionali per l'esistenza di un massimo o di un minimo quando* $AC-B^2=0$.

Se $AC-B^2=0$, allora

$$Ah^2+2Bhk+Ck^2=\frac{k^2}{A}\left(A\frac{h}{k}+B\right)^2;$$

quindi $\varphi(a+h, b+k) - \varphi(a, b)$ è sempre dello stesso segno di A, quando h e k sono presi sufficientemente piccoli, *eccettuato quando* $\frac{h}{k}$ *è eguale* $a - \frac{B}{A}$; ed allora il segno è ancora ignoto e si richiede ulteriore investigazione. Dinotino P, Q, S, T i valori di

$$\frac{d^3u}{dx^3}, \quad \frac{d^3u}{dx^2\,dy}, \quad \frac{d^3u}{dx\,dy^2}, \quad \frac{d^3u}{dy^3},$$

rispettivamente, quando $x = a$, ed $y = b$; e sia

$$R_2 = \frac{1}{\lfloor 4}\left\{h^4\frac{d^4v}{dx^4} + 4h^3k\frac{d^4v}{dx^3\,dy} + \ldots + k^4\frac{d^4v}{dy^4}\right\},$$

x essendo messo $= a$, ed $y = b$ dopo le differenziazioni.

Si supponga $\frac{h}{k}$ *eguale* $a - \frac{B}{A}$, allora svanisce $Ah^2 + 2Bhk + Ck^2$ e

$$\varphi(a+h, b+k) - \varphi(a, b) = \frac{1}{\lfloor 3}\{Ph^3 + 3Qh^2k + 3Shk^2 + Tk^3\} + R_2.$$

Quindi se h e k sono sufficientemente piccoli il segno di

$$\varphi(a+h, b+k) - \varphi(a, b)$$

sarà lo stesso che il segno di

$$Ph^3 + 3Qh^2k + 3Shk^2 + Tk^3,$$

e per conseguenza muterà mutando il segno di h e k; è impossibile quindi che $\varphi(a, b)$ sia un valore massimo o minimo a meno che

$$Ph^3 + 3Qh^2k + 3Shk^2 + Tk^3$$

svanisca quando $\frac{h}{k}$ *è eguale* $a - \frac{B}{A}$.

Supponiamo questa condizione soddisfatta, allora il segno di

$$\varphi(a+h, b+k) - \varphi(a, b),$$

quando $\frac{h}{k}$ *è eguale* $a - \frac{B}{A}$, è lo stesso che il segno di R_2; e quando $\frac{h}{k}$ *non* è eguale $a - \frac{B}{A}$, ed h e k sono presi suffi-

cientemente piccoli, il segno di $\varphi(a+h, b+k)-\varphi(a, b)$ è lo stesso che il segno di A. Ma affinchè $\varphi(a, b)$ possa essere un valore massimo o minimo il segno di $\varphi(a+h, b+k)-\varphi(a, b)$ deve essere invariabile quando h e k sono presi sufficientemente piccoli. Quindi abbiamo la condizione che il segno di R_2 *quando* $\frac{h}{k}$ *è eguale a* $-\frac{B}{A}$ ed h e k sono presi sufficientemente piccoli deve essere lo stesso che il segno di A.

Se queste due condizioni addizionali sono soddisfatte $\varphi(a, b)$ è un valore massimo se A è negativo, ed un valore minimo se A è positivo.

230. Se $A=0$, $B=0$, e $C=0$, dobbiamo procedere così:
$\varphi(a+h, b+k)-\varphi(a, b)=\frac{1}{\lfloor 3}\{Ph^3+3Qh^2k+3Shk^2+Tk^3\}+R_2$, in cui P, Q, S, T, dinotano i valori di $\frac{d^3u}{dx^3}$, $\frac{d^3u}{dx^2\,dy}$, etc., quando $x=a$ ed $y=b$, ed

$$R_2=\frac{1}{\lfloor 4}\left\{h^4\frac{d^4v}{dx^4}+4h^3k\frac{d^4v}{dx^3\,dy}\cdots+k^4\frac{d^4v}{dy^4}\right\},$$

x essendo messo $=a$, ed $y=b$, dopo le differenziazioni.

Quindi, affinchè $\varphi(a, b)$ possa essere un massimo o un minimo, è necessario che P, Q, S, T, svaniscano tutti. Inoltre, R_2 deve essere di segno invariabile; ma le condizioni per ciò sono troppo complicate per potersi quì investigare.

231. Il seguente è un altro metodo per investigare le condizioni affinchè una funzione di due variabili indipendenti possa ammettere un massimo o un minimo.

Sia $u=\varphi(x,y)$, in cui x ed y sono indipendenti: si cercano i massimi e minimi valori di u.

Se y, invece di essere indipendente da x, fosse eguale ad una funzione di x, poniamo $\psi(x)$, allora u sarebbe funzione di *una* variabile x. Avremmo allora

$$\frac{du}{dx}=\left(\frac{du}{dx}\right)+\left(\frac{du}{dy}\right)\psi'(x),$$

$$\frac{d^2u}{dx^2}=\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)+2\left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)\psi'(x)+\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)\{\psi'(x)\}^2+\left(\frac{du}{dy}\right)\psi''(x).$$

Affinchè u possa essere un massimo o un minimo, dobbiamo avere, per l'Art. 211,

$$\frac{du}{dx}=0,$$

onde $$\left(\frac{du}{dx}\right)+\left(\frac{du}{dy}\right)\psi'(x)=0.$$

Quindi, poichè y è realmente indipendente da x, questa equazione deve sussistere qualunque sia la funzione $\psi'(x)$;

onde $$\left(\frac{du}{dx}\right)=0,\quad \left(\frac{du}{dy}\right)=0.$$

Affinchè u possa essere un *massimo*, i valori di x ed y ricavati dalle ultime equazioni debbono rendere $\frac{d^2u}{dx^2}$ negativo, qualunque sia $\psi'(x)$; onde, dinotando con A, B, C, i valori che prendono rispettivamente $\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)$, $\left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)$, e $\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)$ per i valori di x ed y che si considerano, richiediamo che

$$A+2B\psi'(x)+C\{\psi'(x)\}^2$$

sia sempre negativa, qualunque sia $\psi'(x)$. Quindi come nell'Art. 228, A deve essere *negativo*, e *generalmente* $AC-B^2$ deve essere positivo. Similmente, affinchè u possa essere un *minimo* dobbiamo avere A *positivo*, e *generalmente* $AC-B^2$ positivo.

Il metodo precedente si può rendere più simmetrico supponendo sì x che y funzione di una terza variabile t. Ponendo per brevità Dx per $\frac{dx}{dt}$, Dy per $\frac{dy}{dt}$, abbiamo

$$\frac{du}{dt}=\left(\frac{du}{dx}\right)Dx+\left(\frac{du}{dy}\right)Dy,$$

$$\frac{d^2u}{dt^2}=\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)(Dx)^2+2\left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)Dx\,Dy+\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)(Dy)^2$$
$$+\left(\frac{du}{dx}\right)\frac{dDx}{dt}+\left(\frac{du}{dy}\right)\frac{dDy}{dt}.$$

Quindi dobbiamo avere

$$\left(\frac{du}{dx}\right)=0,\quad \left(\frac{du}{dy}\right)=0.$$

Inoltre per i valori di x ed y ricavati da queste equazioni,

$$\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)(Dx)^2 + 2\left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)Dx\,Dy + \left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)(Dy)^2$$

deve conservare un segno invariabile, qualunque siano i segni ed i valori di Dx e Dy. Da ciò deduciamo gli stessi risultati come nell'articolo precedente.

232. Non vi è alcuna difficoltà teoretica nel trovare il valore massimo o minimo di una funzione *implicita* di due variabili indipendenti, nè nel trovare il valore massimo o minimo di una variabile che è legata con un numero qualunque di altre variabili da equazioni quando il numero totale delle equazioni è minore di *due* del numero totale delle variabili. Per esempio, si suppongano le due equazioni

$$f_1(x, y, z, u) = 0, \quad f_2(x, y, z, u) = 0 \ldots\ldots (1),$$

che racchiudono le quattro variabili x, y, z, u, e si cerchi il valore massimo o minimo di u. Noi possiamo eliminare una delle tre variabili x, y, z tra le due equazioni; si supponga che si elimini z; allora otteniamo un' equazione che lega x, y, ed u; da questa troviamo u in termini di x ed y, e procediamo nel modo ordinario per investigare il valore massimo o minimo u. O pure se vogliamo evitare l'eliminazione possiamo adottare il metodo seguente; si considerino x ed y come le variabili indipendenti e si differenziino le date equazioni (1); così

$$\left.\begin{aligned}
\frac{df_1}{dx} + \frac{df_1}{dz}\frac{dz}{dx} + \frac{df_1}{du}\frac{du}{dx} = 0\\
\frac{df_1}{dy} + \frac{df_1}{dz}\frac{dz}{dy} + \frac{df_1}{du}\frac{du}{dy} = 0\\
\frac{df_2}{dx} + \frac{df_2}{dz}\frac{dz}{dx} + \frac{df_2}{du}\frac{du}{dx} = 0\\
\frac{df_2}{dy} + \frac{df_2}{dz}\frac{dz}{dy} + \frac{df_2}{du}\frac{du}{dy} = 0
\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots (2).$$

Da queste equazioni possiamo eliminare $\frac{dz}{dx}$ e $\frac{dz}{dy}$, e trovare $\frac{du}{dx}$ e $\frac{du}{dy}$; allora per un valore massimo o minimo di u

i valori di $\frac{du}{dx}$ e $\frac{du}{dy}$ debbono essere zero. Così, più semplicemente, possiamo porre $\frac{du}{dx}=0$ e $\frac{du}{dy}=0$ nell'equazioni (2), e poi eliminare $\frac{dz}{dx}$ e $\frac{dz}{dy}$; le due equazioni risultanti combinate con (1) determineranno i valori di x, y, z ed u, i quali *possono* corrispondere ad un valore massimo o minimo di u. E differenziando le equazioni (2) rispetto ad x ed y possiamo trovare $\frac{d^2u}{dx^2}$, $\frac{d^2u}{dx\,dy}$, e $\frac{d^2u}{dy^2}$, e così stabilire se u è realmente un massimo o minimo.

Praticamente la soluzione dei problemi di questa classe è facilitata dal metodo dei *moltiplicatori indeterminati*, il quale sarà spiegato nel capitolo seguente.

233. Lo studente troverà vantaggioso di illustrare questo capitolo per mezzo della Geometria a tre dimensioni. Se $z=\varphi(x, y)$ è l'equazione di una superficie, trovare i valori massimi e minimi di z corrisponde a trovare quei punti della superficie che sono ad una maggiore o minore distanza dal piano delle (x, y) rispetto ai punti adiacenti. Le condizioni $\frac{dz}{dx}=0$, e $\frac{dz}{dy}=0$, rendono il *piano tangente* in uno dei punti in quistione parallelo al piano delle (x, y). L'interpetrazione del caso nel qual $B^2-AC=0$ si vedrà da quanto è stabilito nell'Art. 235.

Il metodo dato nell'Art. 231 ammette una chiara illustrazione geometrica. Se, per esempio, vi è un punto della data superficie il quale è ad una distanza *massima* dal piano delle (x, y), allora passando da questo punto ad un punto adiacente, *lungo una curva qualunque giacente sulla superficie*, dobbiamo avvicinarci al piano delle (x, y). Ora, combinando l'equazione $z=\varphi(x,y)$ con $y=\psi(x)$, otteniamo una curva posta sulla superficie data, e dando ogni varietà di forma a $\psi(x)$ otteniamo tante curve quante ci piace. Quindi vediamo che se si pone $y=\psi(x)$, e lasciamo la forma della funzione $\psi(x)$ arbitraria, realmente non togliamo la restrizione che x ed y debbono essere indipendenti.

234. Una funzione u di due variabili *può* avere un valore massimo o minimo per valori di x ed y che rendono $\frac{du}{dx}$ e

$\frac{du}{dy}$ *indeterminati o infiniti.* Tali casi eccezionali debbono essere esaminati in modo speciale, non essendovi alcuna teoria generale applicabile ad essi. Per esempio, si supponga

$$u = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{3}},$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{2x}{3(x^2 + y^2)^{\frac{2}{3}}}, \quad \frac{du}{dy} = \frac{2y}{3(x^2 + y^2)^{\frac{2}{3}}}.$$

Quì, quando x ed y svaniscono $\frac{du}{dx}$ e $\frac{du}{dy}$ diventano indeterminati. Se poniamo $y = \alpha x$, si ha

$$\frac{du}{dx} = \frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}(1+\alpha^2)^{\frac{2}{3}}}, \quad \frac{du}{dy} = \frac{2\alpha}{3x^{\frac{1}{3}}(1+\alpha^2)^{\frac{2}{3}}}.$$

Quindi $\frac{du}{dx}$ e $\frac{du}{dy}$ sono infiniti quando $x = 0$, ed $y = 0$. Ma u è allora realmente un *minimo*, poichè esso svanisce solamente quando x ed y svaniscono e non è mai negativo.

235. *Sopra un caso di valori massimi o minimi di una funzione di due variabili indipendenti.*

Se u dinota una funzione di due variabili indipendenti x ed y, i valori di x ed y che rendono u un massimo o un minimo sono dati dalle due equazioni

$$\frac{du}{dx} = 0, \quad \frac{du}{dy} = 0.$$

Se queste equazioni sono soddisfatte da una *sola* relazione tra x ed y, non possiamo determinare un numero *finito* di valori di x ed y, che rendono u un massimo o un minimo. Questo caso ci proponiamo di esaminare.

Si supponga $u = \varphi(x, y) \dots\dots\dots\dots\dots\dots (1),$

$$\frac{du}{dx} = U \cdot M, \quad \frac{du}{dy} = V \cdot M \dots\dots\dots (2),$$

in cui U, V, M sono funzioni di x ed y.

Se $$M = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3),$$
sì $\frac{du}{dx}$ che $\frac{du}{dy}$ svanisce.

Dalle equazioni (2) si deduce

$$\frac{d^2u}{dx^2} = U\cdot\frac{dM}{dx} + M\cdot\frac{dU}{dx} = U\cdot\frac{dM}{dx} \text{ quando (3) è soddisfatta,}$$

$$\frac{d^2u}{dy^2} = V\cdot\frac{dM}{dy} + M\cdot\frac{dV}{dy} = V\cdot\frac{dM}{dy} \text{ quando (3) è soddisfatta,}$$

$$\frac{d^2u}{dx\,dy} = V\cdot\frac{dM}{dx} + M\cdot\frac{dV}{dx} = V\cdot\frac{dM}{dx} \text{ quando (3) è soddisfatta,}$$

$$\frac{d^2u}{dy\,dx} = U\cdot\frac{dU}{dy} + M\cdot\frac{dU}{dy} = U\cdot\frac{dM}{dy} \text{ quando (3) è soddisfatta,}$$

Ma $\frac{d^2u}{dx\,dy} = \frac{d^2u}{dy\,dx}$ sempre; quindi, quando (3) è soddisfatta,

$$\left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)^2 = U\cdot V\cdot\frac{dM}{dx}\cdot\frac{dM}{dy}.$$

Se dunque A, B, C dinotano i valori di $\frac{d^2u}{dx^2}$, $\frac{d^2u}{dx\,dy}$, e $\frac{d^2u}{dy^2}$ quando (3) è soddisfatta, abbiamo

$$AC = B^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4).$$

Ora supponiamo che da $M=0$, si trovi y in termini di x, poniamo $y=\psi(x)$, e si sostituisca in u; così rendiamo u funzione della sola x. In questa ipotesi

$$\frac{du}{dx} = \left(\frac{du}{dx}\right) + \left(\frac{du}{dy}\right)\frac{dy}{dx}$$
$$= U\cdot M + V\cdot M\frac{dy}{dx}, \text{ da (2),}$$
$$= 0, \text{ poichè } M=0 \text{ per ipotesi.}$$

Quindi, questa sostituzione di $\psi(x)$ per y ha ridotto u ad una *costante*, poichè $\frac{du}{dx}$ svanisce senza assegnare alcun valore particolare ad x.

Ritorniamo ora alle equazioni (1) e (2). Si mutino in $\varphi(x, y)$ le variabili x ed y in $x+h$ ed $y+k$ rispettivamente. Chiamando u' il nuovo valore di u, abbiamo

$$u' = u + h\frac{du}{dx} + k\frac{du}{dy} + \frac{h^2}{1.2}\left\{\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{2k}{h}\,\frac{d^2u}{dx\,dy} + \frac{k^2}{h^2}\frac{d^2u}{dy^2}\right\} + R.$$

Assegniamo ora ad x ed y dei valori qualunque che siano d'accordo con (3), lasciando però il rapporto di k ad h del tutto arbitrario, ed esaminiamo se u' diviene minore o maggiore di u quando k ed h diminuiscono sufficientemente. Il coefficiente di $\frac{h^2}{2}$ nel valore precedente di u', è

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{2k}{h}\frac{d^2u}{dx\,dy} + \frac{k^2}{h^2}\frac{d^2u}{dy^2} \quad \text{o} \quad A + \frac{2k}{h}B + \frac{k^2}{h^2}C.$$

Ora da (4) questo è

$$= A\left\{1 + \frac{k}{h}\sqrt{\frac{C}{A}}\right\}^2,$$

ed è per conseguenza necessariamente positivo se A è positivo, e necessariamente negativo se A è negativo, *qualunque sia il rapporto di k ad h, eccettuato per quel valore particolare del rapporto che fa svanire il coefficiente.* Quindi la conchiusione sarà questa: se assegniamo ad x ed y valori di accordo con $M=0$, allora quando h e k diminuiscono sufficientemente, u' è certamente minore di u se $\frac{d^2u}{dx^2}$ è negativo, e certamente maggiore di u se $\frac{d^2u}{dx^2}$ è positivo, *eccettuato solamente quando k ha ad h un rapporto particolare.* Quest'ultimo caso richiederebbe ulteriore esame, se non avessimo *già mostrato che per una certa supposizione u è ridotto ad una costante*, sicchè quando k ha ad h quell'*unico* particolare rapporto, u' è ultimamente nè maggiore di u nè minore di u, ma eguale ad esso.

L'intera teoria può essere illustrata geometricamente; per esempio, se

$$z^2 = a^2 - x^2 - y^2 + (x\cos\alpha + y\,\text{sen}\,\alpha)^2 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \;(1).$$

trovare i valori massimi o minimi di z;

$$z\frac{dz}{dx} = -x + (x\cos\alpha + y\,\text{sen}\,\alpha)\cos\alpha$$

$$= (y\cos\alpha - x\,\text{sen}\,\alpha)\,\text{sen}\,\alpha,$$

$$z\frac{dz}{dy} = -(y\cos\alpha - x\,\text{sen}\,\alpha)\cos\alpha;$$

quindi, quando $y\cos\alpha - x\,\text{sen}\,\alpha = 0$. . . . . (2),

$\frac{dz}{dx}$ e $\frac{dz}{dy}$ svaniscono entrambi.

In queste circostanze z diviene $= \pm a$.

Ora l'equazione (1) rappresenta un cilindro che ha il suo asse parallelo al piàno delle (x, y). L'equazione (2) rappresenta un piano che passa per l'asse del cilindro, e taglia la superficie secondo due linee rette parallele. Lungo la linea superiore abbiamo $z = a$. Tutt'i punti in questa linea sono alla stessa distanza dal piano delle (x, y), e *ad una distanza maggiore in paragone di ogni altro punto fuori di questa linea.* Questa linea è infatti una *vetta* nella superficie.

Un'altro esempio si può vedere nell'equazione

$$z^2 = 2a\sqrt{(x^2 + y^2)} - (x^2 + y^2).$$

Questa superficie è quella formata dalla rotazione di un cerchio intorno ad una retta tangente che è l'asse delle z. Il più alto punto del circolo genererà con la rotazione un circolo, tutt'i punti del quale sono alla stessa distanza dal piano delle (x, y), e ad una distanza maggiore in paragone di ogni punto adiacente sulla superficie.

ESEMPII.

1. Sia $$u = x^2 + xy + y^2 + \frac{a^3}{x} + \frac{a^3}{y},$$

$$\frac{du}{dx} = 2x + y - \frac{a^3}{x^2}, \qquad \frac{du}{dy} = 2y + x - \frac{a^3}{y^2};$$

quindi $2x + y - \frac{a^3}{x^2} = 0, \quad 2y + x - \frac{a^3}{y^2} = 0;$

quindi $(2x + y)\,x^2 = a^3 = (2y + x)\,y^2;$

quindi $2(x^3 - y^3) = xy(y - x);$

quindi $2(x - y)(x^2 + xy + y^2) = xy(y - x):$

adunque o $x = y,$

o $2x^2 + 3xy + 2y^2 = 0.$

L'ultima equazione conduce ad un risultato impossibile; la prima dà $x = y = \frac{a}{\sqrt[3]{3}}$.

Inoltre $$\frac{d^2u}{dx^2} = 2 + \frac{2a^3}{x^3},$$

$$\frac{d^2u}{dx\,dy} = 1,$$

$$\frac{d^2u}{dy^2} = 2 + \frac{2a^3}{y^3};$$

per conseguenza $\frac{d^2u}{dx^2}\frac{d^2u}{dy^2} - \left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)^2$ è positivo quando x ed y hanno i valori assegnati, e $\frac{d^2u}{dx^2}$ è positivo; quindi u è allora un minimo.

- 2. Sia $$u = \cos x \cos \alpha + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} \alpha \cos(y - \beta),$$

$$\frac{du}{dx} = -\operatorname{sen} x \cos \alpha + \cos x \operatorname{sen} \alpha \cos(y - \beta),$$

$$\frac{du}{dy} = -\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} x \operatorname{sen}(y - \beta).$$

Quindi $\frac{du}{dy}$ svanisce quando $y = \beta$, ed allora $\frac{du}{dx}$ diviene $\operatorname{sen}(\alpha - x)$, e svanisce quando $x = \alpha$.

Inoltre $$\frac{d^2u}{dx^2} = -\cos x \cos \alpha - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} \alpha \cos(y - \beta),$$

$$\frac{d^2u}{dx\,dy} = -\cos x \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen}(y - \beta),$$

$$\frac{d^2u}{dy^2} = -\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} x \cos(y - \beta).$$

Il primo diviene -1, il secondo 0, ed il terzo $-\operatorname{sen}^2\alpha$, quando si sostituiscono i valori assegnati di x ed y. Quindi

$$\frac{d^2u}{dx^2}\frac{d^2u}{dy^2}-\left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)^2$$

è positivo, ed u è un massimo.

-3. Si supponga $u=e^{-x^2-y^2}(ax^2+by^2)$,

$$\frac{du}{dx}=2x\,(a-ax^2-by^2)\,e^{-x^2-y^2},$$

$$\frac{du}{dy}=2y\,(b-ax^2-by^2)\,e^{-x^2-y^2}.$$

Qui $\frac{du}{dx}=0$, e $\frac{du}{dy}=0$, ci dà per una coppia di valori $x=0$, $y=0$. E questi valori rendono

$$\frac{d^2u}{dx^2}=2a,\quad \frac{d^2u}{dx\,dy}=0,\quad \frac{d^2u}{dy^2}=2b;$$

quindi u ha allora un valore minimo.

Un'altra coppia di valori è data da

$$x=0,$$

e $$b-ax^2-by^2=0,$$

cioè, $$x=0,\text{ ed }y=\pm1.$$

Con questi valori abbiamo

$$\frac{d^2u}{dx^2}=2\,(a-b)\,e^{-1},\quad \frac{d^2u}{dx\,dy}=0,\quad \frac{d^2u}{dy^2}=-4be^{-1}.$$

Quindi, se a è minore di b, abbiamo un valore massimo di u, e se a è maggiore di b, non abbiamo nè un massimo nè un minimo.

Vi è solamente un'altra soluzione, cioè, quella trovata combinando

$$y=0,\text{ ed }a-ax^2-by^2=0;$$

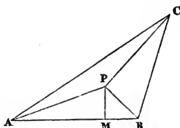
onde $$y=0,\text{ ed }x=\pm1.$$

Qui troveremmo che se a è maggiore di b, non vi è nè un massimo nè un minimo, e se a è maggiore di b, vi è un valore massimo di u.

Se in questo esempio $a = b$, arriviamo al caso eccezionale considerato nell' Art. 235.

4. Trovare un punto tale che la somma delle rette che lo congiungono con i vertici di un dato triangolo sia un minimo.

Sia ABC il dato triangolo; siano $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Si prenda un punto qualunque P e si tiri PM perpendicolare ad AB; sia $AM = x$, $PM = y$. Inoltre siano $AP = u$, $BP = v$, $CP = w$; l'angolo $APM = \theta$, $BPM = \varphi$, $CPM = \psi$.



Allora
$$u^2 = x^2 + y^2,$$
$$v^2 = (c - x)^2 + y^2,$$
$$w^2 = (b \cos A - x)^2 + (b \operatorname{sen} A - y)^2.$$

Per un valore minimo di $u + v + w$ dobbiamo avere

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} + \frac{dw}{dx} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (1),$$

e

$$\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dy} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (2).$$

Ora
$$\frac{du}{dx} = \frac{x}{u} = \operatorname{sen} \theta,$$
$$\frac{dv}{dx} = -\frac{c - x}{v} = -\operatorname{sen} \varphi,$$
$$\frac{dw}{dx} = -\frac{b \cos A - x}{w} = -\operatorname{sen} \psi,$$
$$\frac{du}{dy} = \frac{y}{u} = \cos \theta,$$

$$\frac{dv}{dy} = \frac{y}{v} = \cos\varphi,$$

$$\frac{dw}{dy} = -\frac{b \operatorname{sen} A - y}{w} = \cos\psi.$$

Quindi, da (1) e (2),

$$\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}\varphi + \operatorname{sen}\psi,$$

$$\cos\theta = -\cos\varphi - \cos\psi.$$

Si elevi a quadrato e si addizioni; così

$$1 = 2 + 2\cos(\psi - \varphi),$$

quindi $\cos(\psi - \varphi) = -\frac{1}{2} = \cos 120^\circ.$

Adunque l'angolo *CPB* deve essere di 120°. Similmente si può mostrare che *APB* ed *APC* devono essere ciascuno di 120°. Quindi abbiamo il seguente risultato; si descrivano sui lati del dato triangolo segmenti di cerchio tali che ciascuno contenga un angolo di 120°, ed il loro punto comune di intersezione è il punto cercato.

È chiaro che vi deve essere un punto pel quale la somma proposta è un minimo, e quindi non abbiamo bisogno di esaminare i criterii dipendenti dai secondi coefficienti differenziali.

Se il dato triangolo ha un angolo eguale a 120°, allora il vertice di quest'angolo è il punto richiesto; se esso ha un angolo maggiore di 120°, il metodo non dà la soluzione. Si può provare però che quando il triangolo ha un angolo maggiore di 120°, il vertice dell'angolo ottuso è il punto richiesto.

Infatti si supponga il punto *P dentro* del triangolo e molto vicino all'angolo *B* del triangolo; sia $PB = r$, $PBA = \alpha$, $PBC = \gamma$; allora

$$u = \sqrt{(c^2 - 2cr\cos\alpha + r^2)}, \quad v = r,$$

$$w = \sqrt{(a^2 - 2ar\cos\gamma + r^2)}.$$

Così trascurando i quadrati e le potenze superiori di r abbiamo approssimativamente

$$u + v + w = a + c + r - r(\cos\alpha + \cos\gamma)$$

$$= a + c + r - 2r\cos\frac{\alpha + \gamma}{2}\cos\frac{\alpha - \gamma}{2}.$$

Ora $2\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}$ è minore dell'unità se B è maggiore di 120°, e così $a+c+r-2r\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}$ è *maggiore* di $a+c$. Ed è chiaro che se P è *fuori* del triangolo la somma delle sue distanze da A, B, e C è maggiore di $a+c$. Quindi nel passare da B ad un punto adiacente sì dentro che fuori del triangolo la somma delle sue distanze *aumenta;* e quindi al punto B la somma è un minimo.

I valori $\frac{dv}{dx}$ e $\frac{dv}{dy}$ prendono la forma $\frac{0}{0}$ nel punto B; è questa la ragione per la quale la soluzione non dà il punto B. Abbiamo già osservato nell'Art. 234 che un valore massimo o minimo può esistere corrispondente a tali valori indeterminati dei coefficienti differenziali.

5. Sia
$$u = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y + \cos(x+y),$$
$$\frac{du}{dx} = \cos x - \operatorname{sen}(x+y),$$
$$\frac{du}{dy} = \cos y - \operatorname{sen}(x+y).$$

Se $\frac{du}{dx}$ e $\frac{du}{dy}$ svaniscono, dobbiamo avere
$$\cos x = \cos y = \operatorname{sen}(x+y).$$

Queste equazioni ammettono numerose soluzioni. Per esempio,

se $$\cos x = \cos y,$$
abbiamo $$x = y, \text{ per una soluzione.}$$

Quindi abbiamo
$$\cos x = \operatorname{sen} 2x = 2\operatorname{sen} x\cos x;$$
onde, o $\cos x = 0$, o $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$.

Se prendiamo il primo, e poniamo $x = y = \frac{\pi}{2}$, non si ha nè un massimo nè un minimo; se prendiamo

$$x = y = \frac{3\pi}{2},$$

otteniamo un minimo.

Se prendiamo $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$, e poniamo

$$x = y = \frac{\pi}{6},$$

otteniamo un valore massimo per u.

6. Trovare il valore massimo o minimo di

$$\frac{(hx + ky - a)(hx + ky - b)}{1 + x^2 + y^2}.$$

Dinoti u l'espressione, e v dinoti

$$1 + x^2 + y^2;$$

allora $\quad u = v^{-1}(hx + ky - a)(hx + ky - b);$

$$\frac{du}{dx} = \frac{h(2hx + 2ky - a - b)}{v} - \frac{2x(hx + ky - a)(hx + ky - b)}{v^2},$$

$$\frac{du}{dy} = \frac{k(2hx + 2ky - a - b)}{v} - \frac{2y(hx + ky - a)(hx + ky - b)}{v^2}.$$

Si ponga $\frac{du}{dx} = 0$, e $\frac{du}{dy} = 0$; così deduciamo

$$\frac{x}{h} = \frac{y}{k} = r \text{ poniamo.}$$

Si sostituisca rh per x ed rk per y in $\frac{du}{dx} = 0$, o $\frac{du}{dy} = 0$; otterremo dopo riduzione la seguente equazione di 2° grado in r,

$$r^2(h^2 + k^2)(a + b) + 2r(h^2 + k^2 - ab) - (a + b) = 0;$$

così i valori di r sono possibili, ed uno è positivo e l'altro negativo.

Se differenziamo i valori di $\frac{du}{dx}$ e $\frac{du}{dy}$, e dopo la differenziazione usiamo le relazioni che nascono da

$\frac{du}{dx}=0$ e $\frac{du}{dy}=0$, troveremo

$$\frac{d^2u}{dx^2}=-\frac{h(2ky-a-b)}{xv}=-\frac{2k^2r-a-b}{rv},$$

$$\frac{d^2u}{dy^2}=-\frac{k(2hx-a-b)}{yv}=-\frac{2h^2r-a-b}{rv},$$

$$\frac{d^2u}{dx\,dy}=\frac{2hk}{v}.$$

Quindi il segno di $AC-B^2$ è lo stesso segno di

$$\frac{(2k^2r-a-b)(2h^2r-a-b)}{r^2}-4h^2k^2,$$

ed è per conseguenza lo stesso che il segno di

$$(a+b)^2-2r(h^2+k^2)(a+b).$$

Ora si può mostrare che se $a+b$ non è zero ed a non è eguale a b, il segno dell'ultima espressione è *positivo* per tutti e due i valori che r può avere. Infatti si supponga $a+b$ *positivo;* allora dobbiamo dimostrare che $\frac{a+b}{2(h^2+k^2)}-r$ è positivo, cioè, dobbiamo dimostrare che $\frac{a+b}{2(h^2+k^2)}$ è maggiore della radice positiva dell'equazione di 2° grado in r. Si sostituisca la quantità positiva $\frac{a+b}{2(h^2+k^2)}$ in luogo di r nell'espressione che forma il primo membro dell'equazione; otterremo un risultato *positivo* se a e b sono diseguali; ciò dimostra che $\frac{a+b}{2(h^2+k^2)}$ *è* maggiore della radice positiva dell'equazione. Similmente possiamo stabilire il risultato se $a+b$ è negativo

Quindi le condizioni necessarie per un massimo o minimo sono soddisfatte.

Poichè $AC-B^2$ è positivo A e C hanno lo stesso segno, e questo segno è lo stesso che il segno di $A+C$, e quindi lo stesso che il segno di

$$\frac{a+b-(h^2+k^2)r}{r}.$$

Se $a+b$ è positivo questa espressione è positiva o negativa secondo che r è positivo o negativo; se $a+b$ è negativo essa è positiva o negativa secondo che r è negativo o positivo. Così possiamo distinguere tra il valore massimo ed il minimo di u.

Due casi particolari che sono stati eccettuati precedentemente rimangono a notarsi.

I. Si supponga $a=b$. Quì avremo

$$\frac{du}{dx}=2v^{-2}(hx+ky-a)\{hv-x(hx+ky-a)\},$$

$$\frac{du}{dy}=2v^{-2}(hx+ky-a)\{kv-y(hx+ky-a)\}.$$

Se supponiamo $hx+ky-a=0$ arriviamo al caso discusso nell'Art. 235, nel quale non vi è propriamente un massimo o un minimo. Se prendiamo gli altri fattori in $\frac{du}{dx}$ e $\frac{du}{dy}$ e poniamo

$$hv-x(hx+ky-a)=0 \text{ e } kv-y(hx+ky-a)=0,$$

otterremo

$$x=-\frac{h}{a}, \quad y=-\frac{k}{a};$$

questi valori si troverà che rendono u un massimo.

L'equazione di 2° grado in r, quando $a=b$, ha per sue radici

$$r=\frac{a}{h^2+k^2} \text{ o } r=-\frac{1}{a};$$

il primo valore conduce a valori di x ed y che soddisfano $hx+ky-a=0$; il secondo conduce ai valori

$$x=-\frac{h}{a}, \ y=-\frac{k}{a}.$$

II. Si supponga $a+b=0$. L'investigazione originale diviene inapplicabile; si può mostrare che i soli valori di x ed y che annullano $\frac{du}{dx}$ e $\frac{du}{dy}$ sono $x=0$, $y=0$; e questi danno un valore minimo ad u.

7. Trovare il valore massimo di $x^3y^2(6-x-y)$.

Risultato. Massimo quando $x=3$, $y=2$.

8. Se $u=(2ax-x^2)(2by-y^2)$, trovare il suo valore massimo o minimo.

Risultato. $x=a$, $y=b$, rende u un massimo.

9. Se $u=x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2$, mostrare che quando $x=0$, ed $y=0$, u non è nè un massimo nè un minimo; quando $x=\pm\sqrt{2}$, ed $y=\mp\sqrt{2}$, u è un minimo.

10. Se $u=y^4-8y^3+18y^2-8y+x^3-3x^2-3x$, allora $3+4\sqrt{2}$ è un valore massimo di u e $-6-4\sqrt{2}$ è un valore minimo di u.

11. Se $u=x^2+xy+y^2-ax-by$, allora $\frac{1}{3}(ab-a^2-b^2)$ è un valore minimo di u.

12. Dividere un numero n in tre parti, x, y, e z, tali che $\frac{xy}{2}+\frac{xz}{3}+\frac{yz}{4}$ sia un massimo o un minimo, e determinare quale esso sia.

Risultato. $\frac{x}{21}=\frac{y}{20}=\frac{z}{6}$; un massimo.

13. Se $u=x^3+y^3+3axy$, allora a^3 è un valore massimo di u.

14. Trovare il massimo o minimo di $x(x^2+y^2)-3axy$.

15. Trovare il valore massimo o minimo di $\frac{1+x^2+y^2}{1-ax-by}$.

Risultato. $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{1\pm\sqrt{(1+a^2+b^2)}}{a^2+b^2}$;

col segno superiore vi è un massimo, con l'inferiore un minimo.

16. Se $u=\sqrt{\{(c-x)(c-y)(x+y-c)\}}$, mostrare che vi è un massimo quando $x=y=\frac{2c}{3}$.

17. Mostrare che $\frac{a+bx+cy}{\sqrt{(1+x^2+y^2)}}$ è un massimo quando $x=\frac{b}{a}$, $y=\frac{c}{a}$.

18. Mostrare che $xe^{y+x \operatorname{sen} y}$ non ha nè un massimo nè un minimo.

19. Trovare il valore minimo di $x+y+z$, assoggettato alla condizione

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=1.$$

Risultato. Quando $\frac{x}{\sqrt{a}}=\frac{y}{\sqrt{b}}=\frac{z}{\sqrt{c}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}.$

20. Trovare il valore minimo di $x^p y^q z^r$ assoggettato alla stessa condizione come nell'esempio precedente.

Risultato. Quando $\frac{px}{a}=\frac{qy}{b}=\frac{rz}{c}=p+q+r.$

21. Essendo dati i tre lati di un triangolo, trovare un punto dentro di esso, tale, che abbassando da esso le perpendicolari sui lati, il loro prodotto continuo sia un massimo. Mostrare che le rette le quali uniscono questo punto con i vertici del triangolo lo divideranno in tre triangoli eguali.

22. Trovare il valore massimo di xyz assoggettato alla condizione

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Risultato. $\frac{abc}{3\sqrt{3}}$.

23. Determinare un punto dentro un triangolo, tale che la somma dei quadrati delle distanze dai tre lati sia un minimo.

Risultato. Se p, q, r sono le perpendicolari sui lati a, b, c, rispettivamente, allora

$$\frac{p}{a}=\frac{q}{b}=\frac{r}{c}=\frac{2 \text{ area del triangolo}}{a^2+b^2+c^2}.$$

24. Determinare un punto dentro un triangolo tale che la somma dei quadrati delle distanze dai vertici dei tre angoli sia un minimo.

Risultato. Il centro di gravità del triangolo.

25. Per un punto dentro un triangolo si tirino tre rette parallele ai lati le quali dividono il triangolo in tre parallelogrammi e tre triangoli; mostrare che la somma di questi triangoli è un minimo quando le rette si tirano pel centro di gravità del triangolo.

26. Uno spazio triangolare deve essere diminuito trincerando gli angoli, ciascuna trincea essendo circolare ed avendo per centro il vertice dell'angolo più vicino; mostrare in qual modo si lascia il massimo spazio centrale possibile con una data lunghezza di trincea.

Risultato. I raggi delle tre trincee circolari sono eguali.

27. Data la somma dei tre spigoli di un parallelepipedo rettangolo, trovare la sua forma affinchè la sua superficie sia un massimo.

28. In una data sfera iscrivere un parallelepipedo rettangolo il di cui volume è un massimo. Inoltre uno la di cui superficie è un massimo.

Risultato. Un cubo.

29. Tra tutt' i triangoli dello stesso perimetro trovare quello che genera il massimo doppio cono rivolgendosi intorno ad un lato.

Risultato. Il lato fisso deve essere i due terzi di ciascuno degli altri lati del triangolo.

30. Un parallelepipedo rettangolo è così costruito che un piano condotto per tre dei suoi angoli, ma per nessuno spigolo, contiene un punto le cui distanze dalle tre facce adiacenti ad uno degli altri angoli sono date. Mostrare che la minima diagonale che un tale parallelepipedo può avere, è $(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}} + c^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$, in cui a, b, c sono le date distanze.

CAPITOLO XVI.

VALORI MASSIMI E MINIMI DI UNA FUNZIONE DI PIÙ VARIABILI.

236. Sia $u = \varphi(x, y, z)$ una funzione di tre variabili indipendenti, di cui si cercano i valori massimi e minimi. Con un'investigazione simile a quella nell'Art. 224,

$$\varphi(x+h, y+k, z+l) - \varphi(x, y, z)$$
$$= h\frac{du}{dx} + k\frac{du}{dy} + l\frac{du}{dz}$$
$$+ \frac{h^2}{2}\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2u}{dy^2} + \frac{l^2}{2}\frac{d^2u}{dz^2} + kl\frac{d^2u}{dy\,dz} + hl\frac{d^2u}{dx\,dz} + hk\frac{d^2u}{dx\,dy}$$
$$+ R;$$

in cui R è una funzione che racchiude le potenze ed i prodotti di h, k, l del terzo grado, la quale può essere espressa per abbreviazione con

$$\frac{1}{\underline{|3}}\left\{h\frac{d}{dx} + k\frac{d}{dy} + l\frac{d}{dz}\right\}^3 v,$$

v dinotando $\qquad \varphi(x + \theta h, y + \theta k, z + \theta l)$.

Se prendiamo h, k, l sufficientemente piccoli, il segno di

$$\varphi(x+h, y+k, z+l) - \varphi(x, y, z)$$

dipenderà da quello dei termini che racchiudono solamente le prime potenze di h, k, l; quindi, per assicurare un massimo o un minimo, dobbiamo avere

$$h\frac{du}{dx} + k\frac{du}{dy} + l\frac{du}{dz} = 0,$$

e quindi, poichè h, k, l sono indipendenti,

$$\frac{du}{dx}=0,\quad \frac{du}{dy}=0,\quad \frac{du}{dz}=0.$$

Si trovino i valori di x, y, z da queste equazioni, e quando questi valori si sostituiscono in $\frac{d^2u}{dx^2}$, $\frac{d^2u}{dy^2}$, etc. sia

$$\frac{d^2u}{dx^2}=A,\ \frac{d^2u}{dy^2}=B,\ \frac{d^2u}{dz^2}=C,$$

$$\frac{d^2u}{dy\,dz}=A',\ \frac{d^2u}{dx\,dz}=B',\ \frac{d^2u}{dx\,dy}=C'.$$

Il segno di

$$\varphi(x+h, y+k, z+l)-\varphi(x, y, z),$$

con i valori ora trovati di x, y, z, può farsi dipendere da quello di

$$Ah^2+Bk^2+Cl^2+2A'kl+2B'hl+2C'hk\ldots\ldots.(1).$$

Quindi, affinchè u possa avere un valore massimo o minimo, l'espressione (1) deve ritenere lo stesso segno, qualunque siano i segni ed i valori di h, k, l compresi tra zero e limiti fissi finiti. Se poniamo

$$h=sl,\quad k=tl,$$

ne segue che

$$As^2+Bt^2+C+2A't+2B's+2C'st\ldots\ldots\ldots.(2),$$

deve essere di segno invariabile, qualunque siano i segni ed i valori di s e t. Si moltiplichi (2) per A, e si riordinino i termini; allora

$$(As+B'+C't)^2+(AB-C'^2)t^2+2(AA'-B'C')t+AC-B'^2\ \ldots\ldots\ldots.(3),$$

deve ritenere un segno invariabile.

Quindi, $(AB-C'^2)t^2+2(AA'-B'C')t+AC-B'^2$ deve essere incapace di diventare negativa; per conseguenza

$AB-C'^2$ deve essere positiva, ed....... (4),

$(AA'-B'C')^2$ minore di $(AB-C'^2)(AC-B'^2)$....... (5);

(4) e (5) sono le condizioni che debbono essere soddisfatte affinchè u possa essere un massimo o un minimo. Viceversa,

se esse sono soddisfatte, u è un massimo o un minimo; infatti allora (3) è necessariamente positiva, quindi (2) ha sempre lo stesso segno di A, ed u è un massimo se A è negativo, ed un minimo se A è positivo.

Quindi le condizioni necessarie e sufficienti per l'esistenza di un valore massimo o minimo di una funzione u di tre variabili indipendenti, sono, che i valori di x, y, z tratti da

$$\frac{du}{dx} = 0, \quad \frac{du}{dy} = 0, \quad \frac{du}{dz} = 0,$$

rendano
$$\frac{d^2u}{dx^2}\frac{d^2u}{dy^2} - \left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)^2 \text{ positiva,}$$

e
$$\left(\frac{d^2u}{dx^2}\frac{d^2u}{dy\,dz} - \frac{d^2u}{dx\,dy}\frac{d^2u}{dx\,dz}\right)^2 \text{ minore di}$$

$$\left\{\frac{d^2u}{dx^2}\frac{d^2u}{dy^2} - \left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)^2\right\}\left\{\frac{d^2u}{dx^2}\frac{d^2u}{dz^2} - \left(\frac{d^2u}{dx\,dz}\right)^2\right\}$$

Segue evidentemente da queste condizioni, che

$$\frac{d^2u}{dx^2}\frac{d^2u}{dz^2} - \left(\frac{d^2u}{dx\,dz}\right)^2 \text{ deve essere positiva,}$$

e così $\frac{d^2u}{dx^2}$, $\frac{d^2u}{dy^2}$, $\frac{d^2u}{dz^2}$ debbono avere tutti lo stesso segno, ed u è un massimo se questo segno è negativo, ed un minimo se esso è positivo.

Dalle condizioni (4) e (5) dovremmo congetturare pel principio di simmetria, che $BC-A'^2$ sarà anche positiva se sussistono (4) e (5). Ciò si verifica facilmente, infatti da (5) troviamo che

$$A\{ABC+2A'B'C'-AA'^2-BB'^2-CC'^2\}$$

è positiva, e quindi, poichè da (4) A e B hanno lo stesso segno,

$$B\{ABC+2A'B'C'-AA'^2-BB'^2-CC'^2\}$$

è positiva, e quindi

$$(BB'-A'C')^2 \text{ è minore di } (BC-A'^2)\,(BA-C'^2),$$

da cui segue che $BC-A'^2$ è positiva.

237. Es. Sia $u = \frac{xyz}{(a+x)(x+y)(y+z)(z+b)}$,

$$\frac{du}{dx} = \frac{yz(ay-x^2)}{(a+x)^2(x+y)^2(y+z)(z+b)} = \frac{u(ay-x^2)}{x(a+x)(x+y)}.$$

Similmente, $$\frac{du}{dy} = \frac{u(xz-y^2)}{y(x+y)(y+z)},$$

$$\frac{du}{dz} = \frac{u(by-z^2)}{z(y+z)(z+b)}.$$

Quindi, se $ay-x^2=0$, $xz-y^2=0$, e $by-z^2=0$, u *può* essere un massimo o minimo: queste equazioni danno

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{x} = \frac{z}{y} = \frac{b}{z};$$

onde ciascuna di queste frazioni $= \sqrt[4]{\left(\frac{x}{a}\cdot\frac{y}{x}\cdot\frac{z}{y}\cdot\frac{b}{z}\right)}$ o $\sqrt[4]{\frac{b}{a}}$. Si chiami questa r; allora

$$x = ar,\ y = xr = ar^2,\ z = yr = ar^3.$$

Procedendo ai secondi coefficienti differenziali di u, abbiamo

$$\frac{d^2u}{dx^2} = -\frac{2xu}{x(a+x)(x+y)} + \text{etc.}$$

i termini racchiusi nell'etc. essendo tali da svanire quando si assegnano i valori speciali ad x, y, z.

Quindi $$A = -\frac{2u}{a^2r(1+r)^2} = -\frac{2}{a^3r(1+r)^6}.$$

Similmente possono trovarsi B, C, etc. ed arriveremo finalmente al risultato che u è un massimo.

238. Supponiamo che si cerchi di determinare i valori massimi e minimi di una funzione $\varphi(x, y, z, \ldots)$ di m variabili, queste variabili essendo legate da n equazioni, di cui la forma generale è

$$F_r(x, y, z, \ldots) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Le m variabili contenute in φ evidentemente non sono tutte indipendenti, poichè per mezzo delle date equazioni n di esse

si possono esprimere in termini delle rimanenti $m-n$. Il più semplice metodo *teoretico* per investigare i valori massimi e minimi di φ sarebbe di esprimere per mezzo delle date equazioni i valori di n delle variabili in termini delle rimanenti, e di sostituire questi valori in φ; così φ diverrebbe una funzione di $m-n$ variabili indipendenti, e potremmo procedere a trovare i suoi valori massimi e minimi nel modo già dato per le funzioni di una, due, o tre variabili indipendenti. Ma questo metodo sarebbe spesso impraticabile per la difficoltà di risolvere le date equazioni, e quindi si adotta il seguente.

Si suppongano x, y, z... tutte funzioni di una nuova variabile t, di cui per conseguenza φ diviene una funzione. Si ponga për brevità

$$\frac{dx}{dt} = Dx, \frac{dy}{dt} = Dy, \frac{dz}{dt} = Dz, \ldots\ldots$$

allora $$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi}{dx} Dx + \frac{d\varphi}{dy} Dy + \frac{d\varphi}{dz} Dz + \ldots\ldots\ldots\ldots\ (2).$$

Dalle n date equazioni (1) deduciamo

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dF_1}{dx} Dx + \frac{dF_1}{dy} Dy + \frac{dF_1}{dz} Dz + \ldots = 0 \\ \frac{dF_2}{dx} Dx + \frac{dF_2}{dy} Dy + \frac{dF_2}{dz} Dz + \ldots = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dF_n}{dx} Dx + \frac{dF_n}{dy} Dy + \frac{dF_n}{dz} Dz + \ldots = 0 \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (3).$$

Risolvendo le equazioni lineari (3) possiamo esprimere n delle quantità Dx, Dy, Dz... in termini delle rimanenti $m-n$. Si sostituiscano questi valori in (2), allora rimangono solamente $m-n$ delle quantità Dx, Dy, Dz..., ed abbiamo un risultato che può essere scritto

$$\frac{d\varphi}{dt} = X \cdot Dx + Y \cdot Dy + Z \cdot Dz \ldots + Q \cdot Dq \ldots (4),$$

in cui X, Y, Z... non contengono alcuna delle quantità Dx, Dy, Dz, etc. Poichè, d' accordo con le date equazioni, possiamo considerare le $m-n$ quantità Dx, Dy, Dz,... come

del tutto arbitrarie, segue, nello stesso modo come nell'Art. 232, che se φ deve essere un massimo o un minimo, dobbiamo avere

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0, \ldots\ldots \quad Q = 0 \ldots\ldots\ldots (5).$$

Queste $m - n$ equazioni, combinate con le n date equazioni, daranno i valori delle variabili per i quali φ *può* essere un massimo o un minimo. Per determinare se φ *è* un massimo o un minimo dobbiamo esprimere $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$. Da (4), *con l'uso di* (5), abbiamo

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{dX}{dx}(Dx)^2 + \frac{dY}{dx} Dx\,Dy + \frac{dZ}{dx} Dx\,Dz + \ldots$$

$$+ \frac{dX}{dy} Dy\,Dx + \frac{dY}{dy}(Dy)^2 + \ldots$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Dovremmo allora esaminare se l'espressione precedente ritiene un segno invariabile, quando si adoperano i valori speciali delle variabili $x, y, z, \ldots$, qualunque siano i valori arbitrarii assegnati a Dx, Dy, Dz, etc. Se ciò avviene, allora φ è un massimo se quel segno è negativo, ed un minimo se è positivo.

239. La soluzione pratica di un esempio qualunque secondo la precedente teoria è facilitata facendo uso di ***moltiplicatori indeterminati.*** Si moltiplichi la prima delle equazioni (3) per λ_1, la seconda per $\lambda_2, \ldots$ l'n^{ma} per λ_n, i valori di $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ essendo per ora indeterminati. Si aggiungano i risultati a (2), allora possiamo scrivere

$$\frac{d\varphi}{dt} = \left\{ \frac{d\varphi}{dx} + \lambda_1 \frac{dF_1}{dx} + \lambda_2 \frac{dF_2}{dx} + \lambda_3 \frac{dF_3}{dx} + \ldots \right\} Dx$$

$$+ \left\{ \frac{d\varphi}{dy} + \lambda_1 \frac{dF_1}{dy} + \lambda_2 \frac{dF_2}{dy} + \lambda_3 \frac{dF_3}{dy} + \ldots \right\} Dy$$

$$+ \left\{ \frac{d\varphi}{dz} + \lambda_1 \frac{dF_1}{dz} + \lambda_2 \frac{dF_2}{dz} + \lambda_3 \frac{dF_3}{dz} + \ldots \right\} Dz$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6).$$

Se eguagliamo a zero i coefficienti di n delle quantità $Dx, Dy, \ldots$, avremo n equazioni per determinare $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n$. Si sostituiscano questi valori di $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n$, nei rimanenti termini di (6), e $\frac{d\varphi}{dt}$ prende la forma data in (4); dobbiamo quindi eguagliare a zero i coefficienti delle rimanenti $m-n$ delle quantità $Dx, Dy, \ldots$ Quindi abbiamo la regola: « Si eguaglino a zero i coefficienti di *ciascuna* delle quantità $Dx, Dy, \ldots$ in (6); le m equazioni così trovate, insieme alle n equazioni date, ci faranno eliminare le n quantità $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$, e trovare i valori delle quantità $x, y, z \ldots$

240. La rimanente parte della teoria nell'Art. 238, nella quale si tratta di esaminare il segno di $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$, spesso diviene in pratica eccessivamente complicata. Nel fatto gli esempii di questo metodo sono generalmente tali da permetterci di prevedere che *deve* esistere un massimo o un minimo, e di dispensarci dalla seconda parte dell'investigazione.

Es. 1. Trovare il valore massimo o minimo di

$$x^2+y^2+z^2,$$

assoggettato alle condizioni

$$\left.\begin{aligned} ax+by+cz-1=0, \\ a'x+b'y+c'z-1=0, \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Ponendo φ per $x^2+y^2+z^2$, abbiamo

$$\frac{d\varphi}{dt} = 2x\,Dx + 2y\,Dy + 2z\,Dz.$$

Inoltre dalle equazioni (1),

$$\left.\begin{aligned} aDx+bDy+cDz=0, \\ a'Dx+b'Dy+c'Dz=0, \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Quindi, moltiplicando le equazioni (2) per λ_1 e λ_2 rispettivamente, possiamo porre

$$\frac{d\varphi}{dt} = (2x+\lambda_1 a+\lambda_2 a')\,Dx + (2y+\lambda_1 b+\lambda_2 b')\,Dy$$
$$+ (2z+\lambda_1 c+\lambda_2 c')\,Dz.$$

Onde
$$\left.\begin{aligned} 2x+\lambda_1 a+\lambda_2 a'&=0,\\ 2y+\lambda_1 b+\lambda_2 b'&=0,\\ 2z+\lambda_1 c+\lambda_2 c'&=0,\end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Si moltiplichino le equazioni (3) per a, b, c, rispettivamente e si sommino; allora abbiamo, per (1),

$$2+\lambda_1(a^2+b^2+c^2)+\lambda_2(aa'+bb'+cc')=0 \ldots\ldots\ldots (4).$$

Similmente,

$$2+\lambda_2(a'^2+b'^2+c'^2)+\lambda_1(aa'+bb'+cc')=0 \ldots\ldots\ldots (5).$$

Le equazioni (4) e (5) determinano λ_1 e λ_2, e quindi da (3) troviamo x, y, z. Inoltre moltiplicando (3) per x, y, z, rispettivamente e sommando, abbiamo

$$2\varphi+\lambda_1+\lambda_2=0,$$

che determina φ. Questa è la soluzione della seguente quistione di Geometria a tre dimensioni: « Nella retta d'intersezione di due piani dati trovare il punto più vicino all'origine delle coordinate. » Dalla natura della quistione è evidente che vi deve essere un valore minimo di φ.

Es. 2. Determinare il massimo quadrilatero che si può formare con i quattro lati dati $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, presi in quest'ordine.

Dinoti x l'angolo tra α e β,

y l'angolo tra γ e δ.

L'area della figura è

$$\frac{1}{2}(\alpha\beta \operatorname{sen} x+\gamma\delta \operatorname{sen} y),$$

onde possiamo porre

$$\varphi(x, y)=\alpha\beta \operatorname{sen} x+\gamma\delta \operatorname{sen} y \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Se tiriamo una diagonale della figura dall'intersezione di β e γ all'intersezione di α e δ, abbiamo dai due differenti valori che possono trovarsi per la lunghezza di questa diagonale,

$$\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\cos x=\gamma^2+\delta^2-2\gamma\delta\cos y.$$

Cosi $\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\cos x-\gamma^2-\delta^2+2\gamma\delta\cos y=0 \ldots\ldots\ldots (2).$

Da (1) e (2),

$$\frac{d\varphi}{dt}=\alpha\beta\cos x\,Dx+\gamma\delta\cos y\,Dy\ldots\ldots\ldots\ldots(3),$$

$$0=\alpha\beta\,\text{sen}\,x\,Dx-\gamma\delta\,\text{sen}\,y\,Dy\ldots\ldots\ldots\ldots(4),$$

onde
$$\frac{d\varphi}{dt}=\alpha\beta\left\{\cos x+\frac{\text{sen}\,x\cos y}{\text{sen}\,y}\right\}Dx\ldots\ldots\ldots\ldots(5).$$

Quindi, poichè il coefficiente di Dx deve svanire,

$$\text{sen}\,(x+y)=0.$$

Adunque $x+y$ deve essere zero, o un multiplo di π; la sola soluzione applicabile alla presente quistione è

$$x+y=\pi\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6).$$

Quindi $\cos y=-\cos x$: sostituendo questo valore di $\cos y$ nell'equazione (2), abbiamo

$$\cos x=\frac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2-\delta^2}{2(\alpha\beta+\gamma\delta)}.$$

Poichè da (5)
$$\frac{d\varphi}{dt}=\frac{\alpha\beta\,\text{sen}\,(x+y)}{\text{sen}\,y}\,Dx,$$

abbiamo, trascurando i termini che svaniscono, per (6),

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}=\frac{\alpha\beta\cos(x+y)}{\text{sen}\,y}\,Dx\,(Dx+Dy),$$

che, per mezzo di (4) e (6), diviene

$$-\frac{\alpha\beta}{\text{sen}\,y}\left(1+\frac{\alpha\beta}{\gamma\delta}\right)(Dx)^2.$$

Quindi, poichè $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$ è *negativo*, abbiamo trovato un valore massimo di φ, cioè, quando la somma di due angoli opposti della figura è eguale a due angoli retti.

Es. 3. Trovare il valore massimo e il minimo di u^2 quando

$$u^2=a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2\ldots\ldots\ldots\ldots(1),$$

mentre
$$x^2+y^2+z^2=1\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2),$$

ed
$$ly+my+nz=0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3).$$

Da (1), (2), e (3), deduciamo

$$0 = a^2xDx + b^2yDy + c^2zDz \quad \dots\dots\dots\dots (4),$$

$$0 = xDx + yDy + zDz \quad \dots\dots\dots\dots (5),$$

$$0 = lDx + mDy + nDz \quad \dots\dots\dots\dots (6).$$

Si moltiplichi (5) per λ_1 e (6) per λ_2 e si aggiungano a (4); allora si eguaglino a zero i coefficienti di Dx, Dy, Dz; così

$$a^2x + \lambda_1 x + \lambda_2 l = 0 \quad \dots\dots\dots\dots (7),$$

$$b^2y + \lambda_1 y + \lambda_2 m = 0 \quad \dots\dots\dots\dots (8),$$

$$c^2z + \lambda_1 z + \lambda_2 n = 0 \quad \dots\dots\dots\dots (9).$$

Si moltiplichi (7) per x, (8) per y, e (9) per z, e si aggiungano; allora per (2) e (3),

$$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 + \lambda_1 = 0.$$

Quindi $\lambda_1 = -u^2.$

Onde, da (7), (8), e (9),

$$x = \frac{\lambda_2 l}{u^2 - a^2},$$

$$y = \frac{\lambda_2 m}{u^2 - b^2},$$

$$z = \frac{\lambda_2 n}{u^2 - c^2},$$

e così, dall'equazione (3),

$$\frac{l^2}{u^2 - a^2} + \frac{m^2}{u^2 - b^2} + \frac{n^2}{u^2 - c^2} = 0.$$

Questa equazione è di 2° grado in u^2, dalla quale possono dedursi due valori di u^2, uno dei quali sarà un massimo e l'altro un minimo. È chiaro che deve esistere un valore massimo ed un valore minimo di u^2, poichè x, y, z, non possono svanire simultaneamente, e nessuna di esse può essere maggiore dell'unità; quindi u^2 deve giacere tra i limiti 0 ed $a^2 + b^2 + c^2$.

— Es. 4. Trovare i valori di x, y, z, quando x^4yz^2 è un massimo o minimo, assoggettato alla condizione

$$a^2x^2 + 2by^3 + z^4 = c^4.$$

Abbiamo, ponendo u per x^4yz^2,

$$4x^3yz^2\,Dx + x^4z^2\,Dy + 2x^4yz\,Dz = 0,$$

o

$$u\left\{\frac{4Dx}{x} + \frac{Dy}{y} + \frac{2Dz}{z}\right\} = 0.$$

Inoltre $\quad a^2x\,Dx + 3by^2Dy + 2z^3Dz = 0.$

Onde

$$\frac{4}{x} + \lambda a^2x = 0,$$

$$\frac{1}{y} + 3\lambda by^2 = 0,$$

$$\frac{1}{z} + \lambda z^3 = 0.$$

Si moltiplichi la prima di queste equazioni per x, la seconda per $\frac{2y}{3}$, e la terza per z, e si sommino; allora

$$\frac{17}{3} + \lambda\{a^2x^2 + 2by^3 + z^4\} = 0;$$

onde $\quad \lambda = -\frac{17}{3c^4}.$

Quindi $\quad a^2x^2 = \frac{12c^4}{17}, \quad by^3 = \frac{c^4}{17}, \quad z^4 = \frac{3c^4}{17}.$

5. Trovare il valore massimo ed il minimo di r^2 quando

$$r^2 = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2,$$

le variabili e le costanti essendo legate dalle equazioni

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots (1),$$

$$lx + my + nz = p \ldots\ldots\ldots\ldots (2),$$

$$l\alpha + m\beta + n\gamma = p \ldots\ldots\ldots\ldots (3),$$

$$\frac{\alpha}{a^2l} = \frac{\beta}{b^2m} = \frac{\gamma}{c^2n} \ldots\ldots\ldots\ldots (4).$$

[Lo studente che ha conoscenza della Geometria a tre dimensioni vedrà che (1) è l'equazione di un ellissoide, e (2)

è l'equazione di un piano; α, β, γ sono le coordinate del centro della curva d'intersezione del piano e dell'ellissoide, ed r è il raggio vettore tirato dal centro di questa curva ad un punto qualunque della curva].

Poichè r^2 deve essere un massimo o un minimo, abbiamo

$$(x-\alpha)Dx+(y-\beta)Dy+(z-\gamma)Dz=0 \ldots\ldots\ldots\ldots (5);$$

inoltre da (1) e (2)

$$\frac{xDx}{a^2}+\frac{yDy}{b^2}+\frac{zDz}{c^2}=0 \ldots\ldots\ldots\ldots (6),$$

$$lDx+mDy+nDz=0 \ldots\ldots\ldots\ldots (7).$$

Si moltiplichi (6) per λ, e (7) per μ, e si aggiungano a (5); indi si eguaglino a zero i coefficienti di Dx, Dy, e Dz; così,

$$x-\alpha+\frac{\lambda x}{a^2}+\mu l=0 \ldots\ldots\ldots\ldots (8),$$

$$y-\beta+\frac{\lambda y}{b^2}+\mu m=0 \ldots\ldots\ldots\ldots (9),$$

$$z-\gamma+\frac{\lambda z}{c^2}+\mu n=0 \ldots\ldots\ldots\ldots (10).$$

Si moltiplichino (8), (9), e (10) per $x-\alpha$, $y-\beta$, e $z-\gamma$ rispettivamente, e si aggiungano; così per (2) e (3)

$$r^2+\lambda\left\{\frac{x(x-\alpha)}{a^2}+\frac{y(y-\beta)}{b^2}+\frac{z(z-\gamma)}{c^2}\right\}=0,$$

cioè,

$$r^2+\lambda\left\{1-\frac{x\alpha}{a^2}-\frac{y\beta}{b^2}-\frac{z\gamma}{c^2}\right\}=0 .. (11).$$

Ora da (4)

$$\frac{\alpha}{a^2l}=\frac{\beta}{b^2m}=\frac{\gamma}{c^2n}=\frac{\alpha l+\beta m+\gamma n}{a^2l^2+b^2m^2+c^2n^2}=\frac{p}{a^2l^2+b^2m^2+c^2n^2},$$

così (11) diviene per mezzo di (2)

$$r^2=\lambda\left\{\frac{p^2}{a^2l^2+b^2m^2+c^2n^2}-1\right\}=\lambda k \text{ poniamo.}$$

Così (8), (9), e (10) possono scriversi

$$\left.\begin{aligned} x\left(1+\frac{r^2}{ka^2}\right) &= \alpha - \mu l, \\ y\left(1+\frac{r^2}{kb^2}\right) &= \beta - \mu m, \\ z\left(1+\frac{r^2}{kc^2}\right) &= \gamma - \mu n, \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (12).$$

Sostituendo i valori di x, y, e z da queste in (2), otteniamo

$$\frac{lka^2(\alpha-\mu l)}{ka^2+r^2}+\frac{mkb^2(\beta-\mu m)}{kb^2+r^2}+\frac{nkc^2(\gamma-\mu n)}{kc^2+r^2}=p;$$

inoltre $l\alpha \quad + \quad m\beta \quad + \quad n\gamma \quad = p.$

Sottraendo verrà

$$\frac{a^2l^2\left(k\mu+\frac{r^2\alpha}{a^2l}\right)}{ka^2+r^2}+\frac{b^2m^2\left(k\mu+\frac{r^2\beta}{b^2m}\right)}{kb^2+r^2}+\frac{c^2n^2\left(k\mu+\frac{r^2\gamma}{c^2n}\right)}{kc^2+r^2}=0.$$

Ora $k\mu+\frac{r^2\alpha}{a^2l}$, $k\mu+\frac{r^2\beta}{b^2m}$, e $k\mu+\frac{r^2\gamma}{c^2n}$ sono di egual valore per (4); e questo valore non può essere zero, poichè allora per (12) otterremmo i valori inammissibili $x=\alpha$, $y=\beta$, $z=\gamma$. Quindi dividendo abbiamo

$$\frac{a^2l^2}{ka^2+r^2}+\frac{b^2m^2}{kb^2+r^2}+\frac{c^2n^2}{kc^2+r^2}=0.$$

Questa equazione di 2° grado darà due valori di r^2, uno sarà il valore massimo di r^2 e l'altro il valore minimo.

[Il *prodotto* dei valori di r^2 sarà

$$\frac{k^2a^2b^2c^2\,(l^2+m^2+n^2)}{a^2l^2+b^2m^2+c^2n^2};$$

e π volte la radice quadrata di questo prodotto è l'*area* della curva d'intersezione dell'ellissoide col piano; quindi prendendo il valore *positivo* della radice quadrata abbiamo per l'area

$$\frac{\pi abc\,(a^2l^2+b^2m^2+c^2n^2-p^2)\sqrt{(l^2+m^2+n^2)}}{(a^2l^2+b^2m^2+c^2n^2)^{\frac{3}{2}}}\Bigg].$$

6. Trovare il valore massimo o minimo di u quando $u=x^2y^3z^4$, e $2x+3y+4z=a$.

Risultato. $\left(\frac{a}{9}\right)^9$ è un valore massimo.

7. Trovare il valore minimo di u dall'equazione

$$u = x^2 + y^2 + z^2 + \ldots\ldots,$$

le variabili essendo legate dall'equazione

$$ax + by + cz + \ldots\ldots = k.$$

Il risultato è $u = \frac{k^2}{a^2 + b^2 + c^2 + \ldots\ldots}$.

8. Trovare il valore minimo di

$$x^2 + y^2 + z^2 + x - 2z - xy.$$

Risultato. $x = -\frac{2}{3}$, $y = -\frac{1}{3}$, $z = 1$.

9. Trovare il valore minimo di

$$x^4 + y^4 + z^4,$$

in cui $$xyz = c^3.$$

10. Se x, y, z sono gli angoli di un triangolo, trovare i valori di x, y, z che rendono

$$\text{sen}^m x \,\text{sen}^n y \,\text{sen}^p z$$

un massimo.

11. Trovare il valore massimo o minimo di $x^p y^q z^r$ assoggettato alla condizione $lx + my + nz = a$. Quindi trovare il parallelepipedo di volume massimo che ha per suoi tre spigoli gli assi delle x, y, z, ed ha l'intersezione dei suoi spigoli opposti in un piano dato.

12. Se $ax^2 + bxy + cy^2 = f$, ed $r^2 = x^2 + y^2$, mostrare che i valori massimo e minimo di r^2 sono dati dall'equazione

$$(b^2 - 4ac)r^4 + 4f(a + c)r^2 - 4f^2 = 0.$$

13. Trovare il valore massimo di

$$(ax + by + cz)\, e^{-\alpha^2x^2-\beta^2y^2-\gamma^2z^2}.$$

Risultato. $x = \frac{\mu a}{\alpha^2}, \qquad y = \frac{\mu b}{\beta^2}, \qquad z = \frac{\mu c}{\gamma^2};$

in cui $$\frac{1}{\mu} = \sqrt{2}\sqrt{\left(\frac{a^2}{\alpha^2} + \frac{b^2}{\beta^2} + \frac{c^2}{\gamma^2}\right)}.$$

14. Ad un dato volume V di metallo deve darsi la forma di un vaso rettangolare; le pareti del vaso debbono essere di data spessezza a, e non vi deve essere coperchio. Determinare la figura del vaso affinchè abbia una capacità massima.

Risultato. Se x, y e z, sono le esterne lunghezza, larghezza, e profondità;

$$x = y = a + \left(\frac{V - a^3}{3a}\right)^{\frac{1}{2}}; \quad z = \frac{x}{2}.$$

15. Se $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, in cui

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2a'yz + 2b'zx + 2c'xy = 1,$$

ed $$lx + my + nz = 0,$$

trovare il valore massimo ed il minimo di r^2.

Risultato. Essi sono determinati dall'equazione

$$l^2\left(b - \frac{1}{r^2}\right)\left(c - \frac{1}{r^2}\right) + m^2\left(c - \frac{1}{r^2}\right)\left(a - \frac{1}{r^2}\right) + n^2\left(a - \frac{1}{r^2}\right)\left(b - \frac{1}{r^2}\right)$$
$$- 2mna'\left(a - \frac{1}{r^2}\right) - 2nlb'\left(b - \frac{1}{r^2}\right) - 2lmc'\left(c - \frac{1}{r^2}\right)$$
$$+ 2mnb'c' + 2nlc'a' + 2lma'b' - l^2a'^2 - m^2b'^2 - n^2c'^2 = 0.$$

CAPITOLO XVII.

ELIMINAZIONE DELLE COSTANTI E DELLE FUNZIONI.

241. Possiamo far uso della differenziazione per eliminare da un'equazione che racchiude variabili e costanti una o più delle costanti. Per esempio, sia

$$(y-b)^2+(x-a)^2-c^2=0 \ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Differenziando tre volte, si ha

$$(y-b)\frac{dy}{dx}+x-a=0 \ldots\ldots\ldots\ldots (2),$$

$$(y-b)\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+1=0 \ldots\ldots\ldots\ldots (3),$$

$$(y-b)\frac{d^3y}{dx^3}+3\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}=0 \ldots\ldots\ldots\ldots (4).$$

Da queste quattro equazioni possiamo dedurre un'equazione liberata dalle tre costanti: abbiamo

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x-a}{y-b},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{(x-a)^2+(y-b)^2}{(y-b)^3}=-\frac{c^2}{(y-b)^3},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=-\frac{3\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}}{y-b}=-\frac{3c^2(x-a)}{(y-b)^5}.$$

Quindi $$\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}\frac{d^3y}{dx^3}-3\frac{dy}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2=0 \ldots\ldots\ldots (5). +$$

+ combinando 3 e 4

242. In generale, se abbiamo un'equazione tra x ed y ed n costanti arbitrarie, e differenziamo m volte successivamente, abbiamo $m+1$ equazioni tra le quali possiamo eliminare m costanti, e ciò darà un risultato che contiene $\frac{d^m y}{dx^m}$ ed i coefficienti differenziali inferiori di y. Nell'equazione risultante vi saranno ancora $n-m$ costanti; e siccome possiamo scegliere a piacere le m costanti che si eliminano, possiamo formare tante equazioni risultanti che contengono $n-m$ costanti, quante sono le combinazioni di n cose prese m per volta; cioè,

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{\underline{|m}}.$$

Ciascuna di queste equazioni risultanti si dice *un'equazione differenziale dell'm^{mo} ordine*, $\frac{d^m y}{dx^m}$ essendo il più alto coefficiente differenziale di y che si trova in essa.

Quando l'equazione primitiva si differenzia n volte successivamente, abbiamo $n+1$ equazioni, tra le quali *tutte* le costanti possono essere eliminate, dandoci un'equazione differenziale dell'n^{mo} ordine.

243. Se ritorniamo all'esempio nell'Art. 241, abbiamo per una delle tre equazioni differenziali del primo ordine,

$$(y-b)\frac{dy}{dx}+x-a=0.$$

Se troviamo a da questa equazione in termini di x, y, b, e $\frac{dy}{dx}$, e sostituiamo nell'equazione data, otteniamo un'altra equazione differenziale del primo ordine. Se troviamo b in termini di x, y, etc., e sostituiamo nell'equazione data, otteniamo la rimanente equazione differenziale del primo ordine.

Le tre equazioni differenziali del secondo ordine che possono trovarsi combinando le equazioni (1), (2), e (3) dell'Art. 241, sono

$$b = y + \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

$$a = x - \frac{\frac{dy}{dx}\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

$$c^2 = \frac{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^3}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2}.$$

Si troverà col fatto, che se prendiamo *una qualunque* delle equazioni differenziali del primo ordine, e differenziamo due volte, otterremo lo stesso risultato se eliminiamo le due costanti contenute in queste tre equazioni, come abbiamo già trovato nell'equazione (5) dell'Art. 241. Inoltre, se prendiamo *una qualunque* delle equazioni differenziali del secondo ordine, differenziamo una volta, ed eliminiamo la costante contenuta in queste due equazioni, arriveremo sempre all'equazione (5) dell'Art. 241.

244. Il procedimento col quale, come nell'articolo precedente, possiamo dedurre le equazioni differenziali per mezzo della differenziazione e dell'eliminazione delle costanti, non ha in se stesso molto interesse o valore. Ma il metodo di passare dalle equazioni differenziali all'equazione primitiva da cui esse sono dedotte, forma un'importantissimo ramo delle matematiche. Infatti tutte le investigazioni nella scienza fisica conducono ad *equazioni differenziali*, le quali debbono essere risolute prima che possiamo dire di comprendere il soggetto che si considera. Non entriamo qui nella soluzione delle equazioni differenziali, ma è solito, nei trattati sul Calcolo Differenziale di considerare alquanto la formazione di tali equazioni per mezzo dell'eliminazione, questo procedimento rischiarando i metodi da adottarsi per la loro soluzione.

245. Non solamente le costanti si possono eliminare, ma le funzioni. Si supponga, per esempio,

$$y = \operatorname{sen} x,$$

$$\frac{dy}{dx} = \cos x,$$

$$= \sqrt{(1 - y^2)};$$

onde
$$y^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 1 = 0.$$

Quindi la funzione $\operatorname{sen} x$ è stata eliminata.

Inoltre, sia

$$y = \tan(x + y);$$

onde
$$\frac{dy}{dx} = \{1 + \tan^2(x + y)\}\left\{1 + \frac{dy}{dx}\right\}$$

$$= (1 + y^2)\left(1 + \frac{dy}{dx}\right).$$

Quindi $\tan(x + y)$ è stata eliminata.

In questi esempii funzioni *date* sono state eliminate: procediamo a casi nei quali si eliminano funzioni *ignote*.

246. Si supponga $z = \varphi\left(\frac{x}{y}\right)$, in cui φ dinota una funzione la forma della quale non è data, e che è chiamata perciò una *funzione arbitraria*. Le variabili x ed y si suppongono indipendenti.

Si ponga $\frac{x}{y} = t$; allora

$$z = \varphi(t),$$

$$\frac{dz}{dx} = \varphi'(t)\frac{dt}{dx} = \frac{1}{y}\varphi'(t),$$

$$\frac{dz}{dy} = \varphi'(t)\frac{dt}{dy} = -\frac{x}{y^2}\varphi'(t);$$

onde
$$x\frac{dz}{dx} + y\frac{dz}{dy} = 0.$$

Quindi quest' ultima equazione è vera *qualunque* sia la forma della funzione φ; per esempio, se $z = \log\left(\frac{x}{y}\right)$, o $z = \operatorname{sen}\frac{x}{y}$, o $z = \left(\frac{x}{y}\right)^m$, in ciascun caso abbiamo che l'equazione sussiste.

247. Si supponga $u = \varphi(v)$, in cui u e v sono funzioni note di x, y, e z, ma la *forma* di φ non è data. Le variabili x ed y si suppongono indipendenti. Se differenziamo ambo i membri dell'equazione rispetto ad x ed y successivamente, abbiamo

$$\frac{du}{dx} + \frac{du}{dz}\frac{dz}{dx} = \varphi'(v)\left\{\frac{dv}{dx} + \frac{dv}{dz}\frac{dz}{dx}\right\},$$

$$\frac{du}{dy} + \frac{du}{dz}\frac{dz}{dy} = \varphi'(v)\left\{\frac{dv}{dy} + \frac{dv}{dz}\frac{dz}{dy}\right\}.$$

Onde, qualunque sia la forma di φ,

$$\left(\frac{du}{dx} + \frac{du}{dz}\frac{dz}{dx}\right)\left(\frac{dv}{dy} + \frac{dv}{dz}\frac{dz}{dy}\right) = \left(\frac{du}{dy} + \frac{du}{dz}\frac{dz}{dy}\right)\left(\frac{dv}{dx} + \frac{dv}{dz}\frac{dz}{dx}\right).$$

In altri termini si è eliminata la funzione arbitraria φ.

248. Si suppongano

$$\alpha_1 = f_1(x, y, z),$$

$$\alpha_2 = f_2(x, y, z),$$

due note funzioni di x, y, z, che entrano in un'equazione

$$F\{x, y, z, \varphi_1(\alpha_1), \varphi_2(\alpha_2)\} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (1),$$

φ_1 e φ_2 essendo *funzioni arbitrarie*. Se formiamo le equazioni

$$\frac{dF}{dx} = 0, \qquad \frac{dF}{dy} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2),$$

$$\frac{d^2F}{dx^2} = 0, \qquad \frac{d^2F}{dx\,dy} = 0, \qquad \frac{d^2F}{dy^2} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (3),$$

introduciamo le funzioni ignote

$$\varphi_1'(\alpha_1), \quad \varphi_2'(\alpha_2), \quad \varphi_1''(\alpha_1), \quad \varphi_2''(\alpha_2),$$

e queste, con $\varphi_1(\alpha_1)$, e $\varphi_2(\alpha_2)$, formano *sei* quantità da eli-

minarsi tra le *sei* equazioni (1), (2), (3). Ciò *generalmente* non può essere effettuato. Procedendo alle equazioni

$$\frac{d^3F}{dx^3}=0,\quad \frac{d^3F}{dx^2\,dy}=0,\quad \frac{d^3F}{dx\,dy^2}=0,\quad \frac{d^3F}{dy^3}=0 \ldots (4),$$

introdurremo solamente *due* nuove funzioni ignote, cioè $\varphi_1'''(\alpha_1)$ e $\varphi_2'''(\alpha_2)$. Quindi possiamo ottenere con l'eliminazione un'equazione tra z ed i suoi coefficienti differenziali parziali rispetto ad y ed x del terzo ordine inclusivamente, la quale sarà liberata dalle funzioni $\varphi_1(\alpha_1)$ e $\varphi_2(\alpha_2)$ e dalle loro funzioni derivate. Poichè abbiamo dieci equazioni ed otto quantità da eliminare, possono generalmente ottenersi due equazioni risultanti.

249. Abbiamo detto che generalmente, nel caso supposto nell'articolo precedente, *non possiamo eliminare* le funzioni arbitrarie procedendo sino alle seconde equazioni derivate. Si hanno però dei casi, nei quali, per la forma di α_1 ed α_2, questa eliminazione *può* essere effettuata; per esempio, si supponga

$$z=\varphi_1(x+ay)+\varphi_2(x-ay).$$

Quì

$$\frac{dz}{dx}=\varphi_1'(x+ay)+\varphi_2'(x-ay),$$

$$\frac{dz}{dy}=a\varphi_1'(x+ay)-a\varphi_2'(x-ay),$$

$$\frac{d^2z}{dx^2}=\varphi_1''(x+ay)+\varphi_2''(x-ay),$$

$$\frac{d^2z}{dy^2}=a^2\varphi_1''(x+ay)+a^2\varphi_2''(x-ay);$$

quindi

$$\frac{d^2z}{dy^2}=a^2\frac{d^2z}{dx^2}.$$

250. Supponiamo un'equazione fra tre variabili della forma

$$F\{x, y, z, \varphi_1(\alpha_1), \varphi_2(\alpha_2), \ldots\ldots \varphi_n(\alpha_n)\}=0,$$

che racchiude *n funzioni arbitrarie* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots\ldots \varphi_n$ delle *n note funzioni* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots \alpha_n$ rispettivamente.

Se procediamo nel modo dell'Art. 248, e deduciamo da questa equazione tutte le sue equazioni derivate sino a quelle dell'ordine m^{mo} inclusivamente, otterremo

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots\ldots (m + 1)$$

equazioni, cioè $\frac{(m+1)(m+2)}{2}$ equazioni.

Il numero delle funzioni ignote sarà $(m+1)n$, e quindi, per potere eliminare le funzioni arbitrarie, dobbiamo avere generalmente

$$\frac{(m+1)(m+2)}{2} \text{ maggiore di } (m+1)n,$$

onde $$\frac{m+2}{2} \text{ maggiore di } n;$$

quindi $$m = 2n - 1 \text{ al meno.}$$

Se $m = 2n - 1$, il numero delle equazioni sarà $n(2n+1)$, ed il numero delle funzioni da eliminarsi, $2n^2$; quindi, vi saranno generalmente n equazioni risultanti.

251. Daremo un caso nel quale sono contenute più di tre variabili. Si supponga

$$F\{u, x, y, z, \varphi(\alpha, \beta)\} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (1),$$

in cui $\varphi(\alpha, \beta)$ dinota una funzione arbitraria delle due quantità α e β, le quali sono esse stesse tutte e due funzioni di u, x, y, e z. Se differenziamo (1) rispetto a ciascuna delle variabili indipendenti x, y, z, otteniamo tre equazioni

$$\frac{dF}{dx} = 0, \quad \frac{dF}{dy} = 0, \quad \frac{dF}{dz} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (2),$$

In queste equazioni, oltre la funzione arbitraria φ, abbiamo le sue due funzioni derivate $\frac{d\varphi}{d\alpha}$ e $\frac{d\varphi}{d\beta}$. Quindi, tra le quattro equazioni (1) e (2), potremo eliminare le tre funzioni arbitrarie, ed arrivare ad un'equazione che contiene

$$u, x, y, z, \quad \frac{du}{dx}, \quad \frac{du}{dy}, \quad \text{e } \frac{du}{dz}.$$

252. Supponiamo due equazioni della forma

$$f\{x, y, z, c, \quad \varphi(c), \quad \chi(c), \ldots\ldots\} = 0,$$
$$F\{x, y, z, c, \quad \varphi(c), \quad \chi(c), \ldots\ldots\} = 0,$$

e si debba investigare in quali casi, con le differenziazioni successive, si possano eliminare c e le funzioni arbitrarie $\varphi(c), \chi(c), \ldots\ldots$

Dobbiamo considerare z e c come funzioni delle variabili indipendenti x ed y, ed eliminare le quantità

$$c, \frac{dc}{dx}, \frac{dc}{dy}, \frac{d^2c}{dx^2}, \frac{d^2c}{dx\,dy}, \frac{dc^2}{dy^2}, \ldots,$$
$$\varphi(c), \quad \varphi'(c), \quad \varphi''(c), \ldots\ldots,$$
$$\chi(c), \quad \chi'(c), \quad \chi''(c), \ldots\ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

tra le due date equazioni e quelle derivate da esse con la differenziazione successiva rispetto ad x ed y. Supponiamo che il numero delle funzioni arbitrarie $\varphi(c), \chi(c), \ldots\ldots$ sia n, e sia m un numero intero. Il numero totale delle quantità comprese in c e nei suoi coefficienti differenziali parziali sino all'm^{mo} ordine inclusivamente è

$$1 + 2 + 3 \ldots\ldots + (m + 1), \text{ o } \frac{(m+1)(m+2)}{2}.$$

Il numero delle quantità comprese in

$$\varphi(c), \quad \varphi'(c), \quad \varphi''(c), \ldots\ldots \varphi^m(c),$$
$$\chi(c), \quad \chi'(c), \quad \chi''(c), \ldots\ldots \chi^m(c),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

è $n(m + 1)$. Se aggiungiamo alle due date equazioni tutte quelle che possono ottenersi prendendo le equazioni derivate sino a quelle dell'm^{mo} ordine inclusivamente, il numero totale delle equazioni sarà $(m + 1)(m + 2)$. Quindi l'eliminazione si può effettuare se

$$(m + 1)(m + 2) \text{ è maggiore di } n(m + 1) + \frac{(m+1)(m+2)}{2},$$

cioè, se

$$m + 2 \text{ è maggiore di } n + \frac{m+2}{2},$$

o

$$m + 2 \text{ maggiore di } 2n.$$

Se prendiamo $m = 2n - 1$, avremo $2n(2n+1)$ equazioni, e $4n^2 + n$ quantità da eliminare; quindi, possono ottenersi n differenti equazioni risultanti che contengono x, y, z, ed i coefficienti differenziali parziali di z sino a quelli dell'ordine $(2n-1)^{mo}$ inclusivamente.

253. Come un esempio di quanto precede, supponiamo solamente *una* funzione arbitraria $\varphi(c)$. Le date equazioni diventano

$$f\{(x, y, z, c, \varphi(c)\} = 0,$$
$$F\{(x, y, z, c, \varphi(c)\} = 0.$$

Si differenzii ciascuna rispetto ad x ed y. Abbiamo così sei equazioni, dalle quali possiamo eliminare

$$c, \frac{dc}{dx}, \frac{dc}{dy}, \varphi(c), \text{ e } \varphi'(c),$$

lasciando un'equazione tra

$$x, y, z, \frac{dz}{dx} \text{ e } \frac{dz}{dy}.$$

254. Ancora, supponiamo le funzioni arbitrarie ridursi a *due* $\varphi(c)$ e $\chi(c)$. Se adoperiamo le due date equazioni e quelle ottenute procedendo sino alle *seconde* equazioni derivate, abbiamo in tutto *dodici* equazioni, dalle quali non possiamo in generale eliminare le *dodici* quantità

$$c, \frac{dc}{dx}, \frac{dc}{dy}, \frac{d^2c}{dx^2}, \frac{d^2c}{dx\,dy}, \frac{d^2c}{dy^2},$$
$$\varphi(c), \varphi'(c), \varphi''(c), \chi(c), \chi'(c), \chi''(c).$$

Procedendo alle equazioni derivate del *terzo* ordine, abbiamo *venti* equazioni e *dieciotto* quantità da eliminare, cioè le dodici già scritte, e

$$\frac{d^3c}{dx^3}, \frac{d^3c}{dx^2dy}, \frac{d^3c}{dx\,dy^2}, \frac{d^3c}{dy^3}, \varphi'''(c), \text{ e } \chi'''(c).$$

Quindi possiamo ottenere *due* equazioni differenziali che contengono x, y, z, ed i coefficienti differenziali parziali di z sino al terzo ordine inclusivamente.

255. In casi particolari l'eliminazione può essere effettuata senza procedere a tante differenziazioni quante ne indica la teoria generale. Supponiamo, per esempio, che si abbiano tre funzioni arbitrarie, dovremmo generalmente formare le equazioni derivate del *quinto* ordine per l'Art. 252. Ma se le tre funzioni arbitrarie sono legate in modo, che

$$\chi(c) = \varphi'(c),$$
$$\psi(c) = \varphi''(c),$$

le date equazioni prendono la forma

$$f\{x, y, z, \varphi(c), \varphi'(c), \varphi''(c)\} = 0,$$
$$F\{x, y, z, \varphi(c), \varphi'(c), \varphi''(c)\} = 0;$$

e procedendo sino alle *seconde* equazioni derivate, abbiamo *dodici* equazioni ed *undici* quantità da eliminarsi, cioè

$$c, \frac{dc}{dx}, \frac{dc}{dy}, \frac{d^2c}{dx^2}, \frac{d^2c}{dy^2}, \frac{d^2c}{dx\,dy},$$
$$\varphi(c), \varphi'(c), \varphi''(c), \varphi'''(c), \varphi''''(c).$$

Così possiamo dedurre *una* equazione risultante tra x, y, z, ed i coefficienti differenziali di z sino a quelli del secondo ordine inclusivamente.

256. Le *due* equazioni

$$f\{x, y, z, c, \varphi(c), \chi(c), \ldots\ldots\} = 0,$$
$$F\{x, y, z, c, \varphi(c), \chi(c), \ldots\ldots\} = 0,$$

sono equivalenti ad *una* equazione della forma

$$F\{x, y, z, \varphi_1(x, y, z), \chi_1(x, y, z), \ldots\ldots\} = 0;$$

la quale può ottenersi teoreticamente, trovando dalla prima equazione il valore di c e sostituendolo nella seconda. Per l'Art. 254 vediamo che generalmente non potremo eliminare le due funzioni arbitrarie φ_1, χ_1, da un'equazione della forma

$$F\{x, y, z, \varphi_1(x, y, z), \chi_1(x, y, z)\} = 0,$$

procedendo solamente alle seconde equazioni derivate. Ciò si è già presentato nell'Art. 248.

ESEMPII.

1. Eliminare la costante da

$$xy - c = (x + y)(c - 1).$$

$$\textit{Risultato.}\ (x^2 + x + 1)\frac{dy}{dx} + y^2 + y + 1 = 0.$$

2. Eliminare e^x e $\cos x$ da

$$y - e^x \cos x = 0.$$

$$\textit{Risultato.}\ \frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 2y = 0.$$

3. Se $x^2 - 2ay - a^2 - b = 0$, mostrare che

$$x\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = 0.$$

4. Se $y = ae^{mx} \operatorname{sen} nx$, mostrare che

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2m\frac{dy}{dx} + (m^2 + n^2)\, y = 0.$$

5. Se $y = a \operatorname{sen} x + b \cos x$, allora

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0.$$

6. Eliminare gli esponenziali da

$$xy = ae^x + be^{-x}.$$

$$\textit{Risultato.}\ x\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} - xy = 0.$$

7. Eliminare le costanti da

$$y^2 + bx^2 = a.$$

$$\textit{Risultato.}\ xy\frac{d^2y}{dx^2} + x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y\frac{dy}{dx} = 0.$$

8. Eliminare le costanti e gli esponenziali da

$$ae^y + be^{-y} = fe^x + ge^{-x}.$$

$$\textit{Risultato.}\ \left\{\frac{d^3y}{dx^3} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - \frac{dy}{dx}\right\}\left\{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 1\right\} = 3\frac{dy}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2.$$

9. Se $(x+y)(c+\log x) = ae^{\frac{y}{x}}$, allora

$$xy\frac{dy}{dx} - y^2 = (x+y)^2 e^{-\frac{y}{x}}.$$

—10. Eliminare a e b da

$$y = \frac{a}{\sqrt{x}} \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\log x + b\right).$$

Risultato. $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 2x\frac{dy}{dx} + 2y = 0.$

11. Eliminare le costanti dall'equazione

$$1 = ax^2 + 2bxy + cy^2.$$

Risultato. $\frac{d^3y}{dx^3}\left(y - x\frac{dy}{dx}\right) + 3x\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = 0.$

12. Se $\frac{1}{z} - \frac{1}{x} = f\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right)$, mostrare che

$$x^2\frac{dz}{dx} + y^2\frac{dz}{dy} = z^2.$$

13. Se $\log z = \varphi(ay+bx) + \psi(ay-bx)$, allora

$$a^2\left\{z\frac{d^2z}{dx^2} - \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right\} = b^2\left\{z\frac{d^2z}{dy^2} - \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right\}$$

14. Se $z = e^{\frac{x}{x+y}}\varphi(x+y)$, allora $\frac{dz}{dx} - \frac{dz}{dy} = \frac{z}{x+y}$.

15. Se $z = \varphi(e^x \operatorname{sen} y)$, allora $\operatorname{sen} y\frac{dz}{dy} = \cos y\frac{dz}{dx}$.

16. Se $\frac{dz}{dx} + f(z)\frac{dz}{dy} = 0$, allora

$$\frac{d^2z}{dx^2}\left(\frac{dz}{dy}\right)^2 - 2\frac{d^2z}{dx\,dy}\frac{dz}{dx}\frac{dz}{dy} + \frac{d^2z}{dy^2}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = 0.$$

17. Se $z = f\left(\frac{y-nz}{x-mz}\right)$, allora

$$(x-mz)\frac{dz}{dx} + (y-nz)\frac{dz}{dy} = 0.$$

18. Eliminare le funzioni arbitrarie da

$$z = x\varphi(ax+by) + y\psi(ax+by).$$

Risultato. $a^2\dfrac{d^2z}{dy^2} - 2ab\dfrac{d^2z}{dx\,dy} + b^2\dfrac{d^2z}{dx^2} = 0.$

19. Eliminare le funzioni arbitrarie e le esponenziali da

$$u = e^{nx}F(x+y) + e^{-nx}f(x-y).$$

Risultato. $\dfrac{d^2u}{dx^2} = n^2u + 2n\dfrac{du}{dy} + \dfrac{d^2u}{dy^2} = 0.$

20. Eliminare le funzioni circolari e le logaritmiche da

(1) $y = \operatorname{sen}\log x$, (2) $y = \log\operatorname{sen} x$.

Risultati. (1) $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} + x\dfrac{dy}{dx} + y = 0$, (2) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + 1 = 0.$

21. Se $z = \dfrac{y^2}{2} + \varphi\left(\dfrac{1}{x} + \log y\right)$, allora $y\dfrac{dz}{dy} + x^2\dfrac{dz}{dx} = y^2$.

22. Eliminare le funzioni da $y = xf(z) + \varphi(z)$.

Risultato. Lo stesso come nell'Es. 16.

23. Se $z + mx + ny = f\{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2\}$, allora

$$\{y - b - n(z-c)\}\frac{dz}{dx} - \{x - a - m(z-c)\}\frac{dz}{dy} = n(x-a) - m(y-b).$$

24. Se $z = x^2(ax+by) + \varphi(y^2+x^2) + \psi(y^2-x^2)$,

allora $\dfrac{1}{x^2}\dfrac{d^2z}{dx^2} - \dfrac{1}{y^2}\dfrac{d^2z}{dy^2} - \dfrac{1}{x^3}\dfrac{dz}{dx} + \dfrac{1}{y^3}\dfrac{dz}{dy} = \dfrac{3a}{x} - \dfrac{bx^2}{y^3}.$

25. Se $z = \varphi\{x + f(y)\}$, allora

$$\frac{d^2z}{dx\,dy}\frac{dz}{dx} - \frac{dz}{dy}\frac{d^2z}{dx^2} = 0.$$

26. Eliminare le funzioni arbitrarie da

$$z = f\left(\frac{x}{y}\right)\cdot\varphi\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)\cdot\chi(xy).$$

Risult. $\left(x^2\dfrac{d^2z}{dx^2} - y^2\dfrac{d^2z}{dy^2}\right)z + \left(z - x\dfrac{dz}{dx} - y\dfrac{dz}{dy}\right)\left(x\dfrac{dz}{dx} - y\dfrac{dz}{dy}\right) = 0.$

27. Se $u+y+z=x^2f\{x(u-y), x(y-z)\}$, allora

$$x\frac{du}{dx}+(u+z)\frac{du}{dy}+(u+y)\frac{du}{dz}=y+z.$$

28. Se $u=\varphi\left\{F(y^2-xz), f\left(\frac{3zy}{x}-\frac{2y^3}{x^2}-t\right)\right\}$, allora

$$x\frac{du}{dy}+2y\frac{du}{dz}+3z\frac{du}{dt}=0.$$

29. Se $u=xyz\cdot F\{f_1(x^2+y^2+z^2), f_2(xy+xz+yz)\}$, allora

$$(y-z)\frac{du}{dx}+(z-x)\frac{du}{dy}+(x-y)\frac{du}{dz}$$
$$=u\left(\frac{y-z}{x}+\frac{z-x}{y}+\frac{x-y}{z}\right).$$

30. Eliminare z dalle equazioni

$$\frac{d^2x}{dz^2}=\varphi(x,y), \qquad \frac{d^2y}{dz^2}=\psi(x,y).$$

Risultato. $2\varphi(x,y)=\dfrac{d}{dx}\dfrac{\psi(x,y)-\varphi(x,y)\dfrac{dy}{dx}}{\dfrac{d^2y}{dx^2}}$.

31. Eliminare le funzioni arbitrarie da

$$z=x^nf\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{1}{y^n}\varphi\left(\frac{x}{y}\right).$$

Risultato. $x^2\dfrac{d^2z}{dx^2}+2xy\dfrac{d^2z}{dx\,dy}+y^2\dfrac{d^2z}{dy^2}+x\dfrac{dz}{dx}+y\dfrac{dz}{dy}=n^2z.$

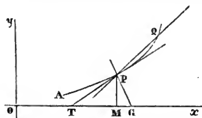
32. Mostrare come eliminare le n funzioni arbitrarie da

$$z=\varphi_1\left(\frac{y}{x}\right)+x\varphi_2\left(\frac{y}{x}\right)\ldots\ldots+x^{n-1}\varphi_n\left(\frac{y}{x}\right).$$

CAPITOLO XVIII.

TANGENTE E NORMALE AD UNA CURVA PIANA.

257. Def. Siano P, Q, due punti di una curva, e si supponga una linea retta tirata per essi; la posizione limite di questa retta, a misura che Q si muove lungo la curva e si



avvicina indefinitamente a P, è chiamata *la tangente della curva nel punto P.*

Trovare l'equazione della tangente in un dato punto della curva.

Siano x, y, le coordinate del dato punto P,

$x + \Delta x$, $y + \Delta y$, le coordinate di un' altro punto Q della curva.

Allora x', y', essendo le coordinate correnti, avremo per l'equazione della retta PQ,

$$y' - y = \frac{y + \Delta y - y}{x + \Delta x - x}(x' - x),$$

cioè,

$$y' - y = \frac{\Delta y}{\Delta x}(x' - x).$$

Ora si avvicini Q indefinitamente a P; il limite di

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ è $\frac{dy}{dx}$, e l'equazione della tangente in P è

$$y'-y=\frac{dy}{dx}(x'-x).$$

258. Def. La normale ad una curva in un punto è la linea retta condotta pel punto perpendicolarmente alla tangente nello stesso punto.

Trovare l'equazione della normale in un punto della curva.

Poichè l'equazione della tangente nel punto (x, y) è

$$y'-y=\frac{dy}{dx}(x'-x),$$

l'equazione della normale nello stesso punto è

$$y'-y=-\frac{1}{\frac{dy}{dx}}(x'-x),$$

supposti gli assi rettangolari.

259. La tangente e la normale nel punto P incontrino l'asse delle x nei punti T e G rispettivamente; si tiri l'ordinata PM; allora

MT si chiama la *sottangente*,

MG si chiama la *sunnormale*.

Ora $\frac{MP}{MT}=$ alla tangente di PTx,

$$=\frac{dy}{dx};$$

onde $$MT=\frac{y}{\frac{dy}{dx}}=y\frac{dx}{dy}.$$

Similmente $\frac{MG}{MP}=$ tangente di $GPM=$ tangente di PTx,

$$=\frac{dy}{dx};$$

onde $$MG=y\frac{dy}{dx},$$

In queste espressioni della sunnormale e della sottangente, si deve osservare che la sottangente è misurata da M verso *sinistra*, e la sunnormale è misurata da M verso *dritta*. Se in una curva qualunque $y\frac{dy}{dx}$ è una quantità *negativa*, ciò indica che G giace a *sinistra* di M, e, siccome in questo caso $y\frac{dx}{dy}$ è anche negativa, T giace a *dritta* di M.

260. Nell'equazione della tangente si ponga $y'=0$, allora

$$x'=x-y\frac{dx}{dy};$$

questo adunque è il valore di OT.

Similmente, se poniamo $x'=0$, si trova

$$y'=y-x\frac{dy}{dx},$$

che dà l'ordinata del punto in cui la tangente incontra l'asse delle y.

261. La lunghezza della perpendicolare abbassata dall'origine sulla tangente è, per le formole ordinarie della geometria analitica,

$$\frac{x\frac{dy}{dx}-y}{\pm\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}}.$$

262. Se l'equazione di una curva è data sotto la forma $\varphi(x, y)=0$, abbiamo

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)}{\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)}.$$

Con ciò l'equazione della tangente diventa

$$(y'-y)\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)+(x'-x)\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)=0,$$

e quella della normale

$$(y'-y)\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)-(x'-x)\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)=0.$$

La lunghezza della perpendicolare alla tangente dall'origine è, tralasciando il segno,

$$\frac{x\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)+y\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)}{\sqrt{\left\{\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2\right\}}}.$$

263. Alle volte conviene determinare una curva per mezzo delle due equazioni

$$y=\psi(t), \qquad x=\chi(t),$$

sicchè x ed y sono ambedue funzioni di una variabile t, eliminando la quale tra le date equazioni, si può ottenere un risultato della forma ordinaria $y=f(x)$. Con questa supposizione, abbiamo

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}.$$

Quindi l'equazione della tangente diventa

$$(y'-y)\frac{dx}{dt}=(x'-x)\frac{dy}{dt},$$

e quella della normale

$$(y'-y)\frac{dy}{dt}=-(x'-x)\frac{dx}{dt}.$$

Nella figura abbiamo supposti gli assi rettangolari; se essi sono obbliqui non si ha alcun cangiamento sia nella ricerca dell'equazione della tangente che nel risultato. Ma l'equazione della normale è

$$y'-y=-\frac{1+\cos\omega\frac{dy}{dx}}{\cos\omega+\frac{dy}{dx}}(x'-x),$$

in cui ω è l'angolo d'inclinazione degli assi.

264. Es. (1). L'equazione generale di una curva di secondo ordine è

$$Ay^2+2Bxy+Cx^2+2Dy+2Ex+F=0.$$

Quindi, per l' Art. 262, l'equazione della tangente nel punto (x, y) è

$$(y'-y)(Ay+Bx+D)+(x'-x)(Cx+By+E)=0,$$

la quale si riduce per mezzo della data equazione ad

$$y'(Ay+Bx+D)+x'(Cx+By+E)+Dy+Ex+F=0.$$

Es. (2). Supponiamo che l'equazione della curva sia

$$y=ae^{\frac{x}{c}},$$

onde

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a}{c}e^{\frac{x}{c}}=\frac{y}{c};$$

e l'equazione della tangente diventa

$$y'-y=\frac{y}{c}(x'-x).$$

La sottangente $MT=\dfrac{y}{\frac{dy}{dx}}=c$, ed è per conseguenza costante in questa curva che è chiamata la *curva logaritmica*.

Es. (3). L'equazione della spirale logaritmica è

$$\tan^{-1}\frac{y}{x}=k\log\sqrt{(x^2+y^2)}.$$

Onde

$$\frac{x\frac{dy}{dx}-y}{x^2+y^2}=\frac{k\left(y\frac{dy}{dx}+x\right)}{x^2+y^2},$$

quindi

$$\frac{dy}{dx}=\frac{kx+y}{x-ky};$$

e l'equazione della tangente è

$$y'-y=\frac{kx+y}{x-ky}(x'-x).$$

Es. (4). Supponiamo che l'equazione $\varphi(x, y) = 0$, o $u = 0$, possa essere messa sotto la forma

$$v_n + v_{n-1} + v_{n-2} + \ldots\ldots + v_1 + v_0 = 0,$$

in cui v_n, v_{n-1}, ... sono funzioni *omogenee* del grado $n, n-1, \ldots\ldots$ rispettivamente; da ciò

$$\frac{du}{dx} = \frac{dv_n}{dx} + \frac{dv_{n-1}}{dx} + \ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{du}{dy} = \frac{dv_n}{dy} + \frac{dv_{n-1}}{dy} + \ldots\ldots\ldots,$$

e l'equazione della tangente è

$$(y'-y)\left(\frac{dv_n}{dy} + \frac{dv_{n-1}}{dy} + \ldots\right) + (x'-x)\left(\frac{dv_n}{dx} + \frac{dv_{n-1}}{dx} + \ldots\right) = 0.$$

Ma per la proprietà delle funzioni omogenee (si vegga Es. 3 alla fine del Capitolo VIII.)

$$y\frac{dv_n}{dy} + x\frac{dv_n}{dx} = nv_n,$$

$$y\frac{dv_{n-1}}{dy} + x\frac{dv_{n-1}}{dx} = (n-1)\,v_{n-1}.$$

. . . .

Quindi l'equazione della tangente diviene

$$y'\left(\frac{dv_n}{dy} + \frac{dv_{n-1}}{dy} + \ldots\ldots\right) + x'\left(\frac{dv_n}{dx} + \frac{dv_{n-1}}{dx} + \ldots\ldots\right)$$

$$= nv_n + (n-1)\,v_{n-1} + (n-2)\,v_{n-2} + \ldots\ldots,$$

o, poichè $\quad v_n + v_{n-1} + v_{n-2} \ldots + v_1 + v_0 = 0,$

$$y'\left(\frac{dv_n}{dy} + \frac{dv_{n-1}}{dy} + \ldots\ldots\right) + x'\left(\frac{dv_n}{dx} + \frac{dv_{n-1}}{dx} + \ldots\ldots\right)$$

$$+ v_{n-1} + 2v_{n-2} + \ldots + (n-1)\,v_1 + nv_0 = 0.$$

Es. (5). Determinare un punto in una curva data in modo che l'area del triangolo formato dalla tangente in questo punto e dagli assi delle coordinate sia un massimo o un minimo.

Per l'Art. 260, l'area varia come il prodotto di

$$x - y\frac{dx}{dy}, \text{ ed } y - x\frac{dy}{dx};$$

si ponga
$$u = \frac{\left(y - x\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{dy}{dx}};$$

allora si cerca il massimo o il minimo valore di u.
Si troverà che

$$\frac{du}{dx} = -\frac{\left(y - x\frac{dy}{dx}\right)\left(x\frac{dy}{dx} + y\right)\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Ora, come vedremo nel Capitolo XXI, dove $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, la curva ha in generale un punto singolare chiamato un *punto d'inflessione*. Dove $y - x\frac{dy}{dx} = 0$, la tangente passa per l'origine e *l'area in quistione svanisce*. Sarà spesso evidente quando si considera una curva particolare, che nessuno di questi casi eccezionali può aver luogo. Abbiamo dunque $x\frac{dy}{dx} + y = 0$ come la condizione che determina il punto cercato.

Quando $x\frac{dy}{dx} + y = 0$, abbiamo, per l'Art. 260,

$$x' = 2x, \text{ ed } y' = 2y.$$

Quindi in generale quando l'area è un massimo o un minimo la porzione della tangente tra gli assi è *bisegata nel punto di contatto*. In generale sarà chiaro dalla figura nel caso di una curva particolare se l'area è un massimo o un minimo.

265. Se l'equazione della curva è data nella forma

$$F(x, y) - c = 0,$$

l'equazione della tangente nel punto (x, y), sarà

$$(y' - y)\frac{dF}{dy} + (x' - x)\frac{dF}{dx} = 0 \dots\dots\dots\dots (1);$$

e l'equazione della normale

$$(y' - y)\frac{dF}{dx} - (x' - x)\frac{dF}{dy} = 0 \dots\dots\dots\dots (2).$$

Se consideriamo x', y', come costanti, l'equazione (1) combinata con $F(x, y) = c$, darà le coordinate dei punti in cui le tangenti condotte dal punto (x', y') incontrano le diverse curve rappresentate da $F(x, y) = c$; e l'equazione (2) combinata con $F(x, y) = c$, darà le coordinate dei punti in cui le normali condotte dal punto (x', y') incontrano le diverse curve rappresentate da $F(x, y) = c$.

Poichè le equazioni (1) e (2) sono indipendenti da c, esse rappresenteranno i luoghi geometrici dei punti in cui le curve che si ottengono attribuendo diversi valori a c nella equazione $F(x, y) = c$, sono incontrate dalle loro tangenti o dalle loro normali rispettivamente, che passano pel punto (x', y'). Così, se vogliamo tirare le *tangenti* dal punto (x', y') ad una qualunque delle curve $F(x, y) = c$, dovremo costruire la curva

$$(x' - x)\left(\frac{dF}{dx}\right) + (y' - y)\left(\frac{dF}{dy}\right) = 0;$$

e determinare dove essa intersega la curva particolare $F(x, y) = c$ che si considera; congiungendo il punto o i punti d'intersezione col punto (x', y') avremo la richiesta tangente o le tangenti. Similmente, possiamo tirare le ***normali*** da (x', y') ad una qualunque delle curve $F(x, y) = c$.

ESEMPII.

1. Nella curva $y(x-1)(x-2) = x - 3$, mostrare che la tangente è parallela all'asse delle x nel punto pel quale $x = 3 \pm \sqrt{2}$.

2. Nella curva $y^3 = (x-a)^2 (x-c)$, mostrare che la tangente è parallela all'asse delle x nel punto pel quale $x = \frac{2c+a}{3}$.

3. Nella curva $x^2 y^2 = a^3 (x+y)$, la tangente all'origine è inclinata sotto un angolo di 135° all'asse delle x.

4. Nella curva $x^2 (x+y) = a^2 (x-y)$, l'equazione della tangente all'origine è $y = x$.

5. Nella curva $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ trovare la lunghezza della perpendicolare dall'origine sulla tangente nel punto (x, y); inoltre trovare la lunghezza della parte della tangente compresa tra i due assi.

Risultati. (1) $\sqrt[3]{(axy)}$; (2) a.

6. Se x_1, y_1 sono le parti degli assi delle x e delle y tagliate dalla tangente nel punto (x, y) alla curva

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1, \text{ allora } \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1.$$

7. Mostrare che tutte le curve rappresentate dall'equazione

$$\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n = 2,$$

attribuendo diversi valori ad n, si toccano scambievolmente nel punto (a, b).

8. Nella curva $y^n = a^{n-1} x$, esprimere l'equazione della tangente nella sua forma più semplice; e determinare il valore di n quando l'area racchiusa tra la tangente e gli assi delle coordinate è costante.

9. Se la normale alla curva $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, fa un angolo φ con l'asse delle x, mostrare che la sua equazione è

$$y \cos\varphi - x \operatorname{sen}\varphi = a \cos 2\varphi.$$

10. Sotto quale angolo la curva $y^2 = 2ax$ taglia la curva $x^3 - 3axy + y^3 = 0$?

Risultato. Le curve s'intersegano all'origine; ivi la prima curva ha per tangente l'asse delle y, e la seconda curva ha tutte e due gli assi per tangenti. Le curve inoltre s'intersegano nel punto $x = a\sqrt[3]{2}$, $y = a\sqrt[3]{4}$; ed ivi esse s'intersegano sotto un angolo che ha per cotangente $\sqrt[3]{4}$.

11. Siano tirate le tangenti all'ellisse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, ed al circolo $x^2 + y^2 - a^2 = 0$, nei punti in cui un'ordinata comune l'incontra; mostrare che se φ è la più grande inclinazione di queste tangenti

$$\tan\varphi = \frac{a - b}{2\sqrt{(ab)}}.$$

12. Se si conducono le tangenti da un punto (h, k) alla curva che ha per equazione $\left(\frac{x}{a}\right)^3 + \left(\frac{y}{b}\right)^3 = 1$, un'ellisse di cui i semiassi sono $a\left(\frac{a}{h}\right)^{\frac{1}{2}}$, e $b\left(\frac{b}{k}\right)^{\frac{1}{2}}$ passerà per i punti di contatto.

13. Mostrare che tutti i punti della curva $y^2 = 4a\left(x + a \operatorname{sen}\frac{x}{a}\right)$ nei quali la tangente è parallela all'asse delle x appartengono ad una certa parabola.

14. La normale ad una parabola in un punto P è prolungata sino ad incontrare la direttrice in Q, e la tangente in P incontra la direttrice in R; trovare (1) quando QR è un minimo, (2) quando il triangolo PQR è un minimo.

Risultati. (1) $x = \frac{a}{3}$, (2) $x = \frac{a}{5}$; in cui $y^2 = 4ax$ è l'equazione della parabola.

CAPITOLO XIX.

ASINTOTI.

266. Supponiamo uno o più rami di una curva estendersi ad una distanza infinita dall'origine, e che ai punti successivi di un tal ramo si tirino le tangenti. Allora due casi diversi possono darsi rispetto alle direzioni di queste tangenti; esse, nel passare da un punto ad un altro lungo la curva, o si avvicinano ad un limite definito o no. E rispetto alla *posizione* di queste tangenti, due casi sono possibili; le parti intercette dagli assi o tendono ad un limite finito o no. Se la direzione ha un limite, come anche una o tutte e due le intercette un limite, vi esiste una linea retta verso la quale si avvicinano continuamente le successive tangenti. Una tale retta si chiama un asintoto della curva; quindi abbiamo la definizione seguente.

267. Def. Un asintoto di una curva è la posizione limite della tangente quando il punto di contatto si allontana ad una distanza infinita dall'origine.

Per trovare se una curva proposta ha un asintoto, dobbiamo prima stabilire se $\frac{dy}{dx}$ ha un valore limite quando procediamo ad una distanza infinita dall'origine. Se esso *non lo ha* generalmente non vi è asintoto. Se $\frac{dy}{dx}$ *ha* un valore limite, dobbiamo allora stabilire se l'intercetta sull'asse delle x, che per l'Art. 260 è $x - y\frac{dx}{dy}$, ha un valore limite. Supponiamo che lo abbia, e sia dinotato da c mentre μ dinoti il limite di $\frac{dy}{dx}$, allora $y = \mu(x-c)$ è l'equazione di un asintoto.

268. Se $\frac{dy}{dx}$ cresce senza limite, *e nello stesso tempo* $x - y\frac{dx}{dy}$ *ha un limite finito*, abbiamo un asintoto parallelo all' asse delle y.

Inoltre *possiamo* avere un asintoto quando il limite di $x - y\frac{dx}{dy}$ è infinito, cioè nel caso in cui il limite di $\frac{dy}{dx}$ è zero, ed il limite di $y - x\frac{dy}{dx}$, che è l'intercetta sull'asse delle y, è infinito. L'asintoto è allora parallelo all'asse delle x.

269. Es. L'equazione della parabola è $y = 2\sqrt{ax}$; onde $\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{a}{x}}$; quindi, quando x cresce indefinitamente il limite di $\frac{dy}{dx}$ è zero; ma $y - x\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{ax} - \sqrt{ax} = \sqrt{ax}$, che non ha limite finito. Quindi non vi è asintoto.

L'equazione dell'iperbole è

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{(x^2 - a^2)};$$

onde

$$\frac{dy}{dx} = \frac{bx}{a\sqrt{(x^2 - a^2)}},$$

ed

$$x - y\frac{dx}{dy} = x - \frac{x^2 - a^2}{x} = \frac{a^2}{x}.$$

Quindi il limite di $\frac{dy}{dx}$ quando x è infinito è $\frac{b}{a}$, ed il limite di $x - y\frac{dx}{dy}$ è 0. Onde $y = \frac{b}{a}x$ è l'equazione di un asintoto.

Si supponga $y = \frac{a^3}{(x-b)^2} + c$ essere l'equazione di una curva, allora

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2a^3}{(x-b)^3},$$

$$x - y\frac{dx}{dy} = x + \frac{x-b}{2} + \frac{c(x-b)^3}{2a^3}.$$

A misura che x si avvicina a b, y e $\frac{dy}{dx}$ crescono senza limite. Il limite di $x - y\frac{dx}{dy}$ è b, e, per l'Art. 268, vi è un asintoto parallelo all'asse delle y, avente per equazione $x = b$.

270. Un asintoto si può anche definire come *una linea retta, la distanza della quale da un punto di una curva diminuisce senza limite quando il punto sulla curva si allontana ad una distanza infinita dall'origine.*

Si supponga $$y = \mu x + \beta$$

l'equazione di una linea retta, ed

$$y = \mu x + \beta + v$$

l'equazione di una curva, allora se v diminuisce senza limite quando x ed y crescono senza limite, la linea retta sarà un asintoto della curva. Poichè se x, y, sono le coordinate di un punto della curva, la distanza perpendicolare di tal punto dalla linea retta è

$$\frac{y - \mu x - \beta}{\sqrt{(1 + \mu^2)}} \text{ o } \frac{v}{\sqrt{(1 + \mu^2)}},$$

e questa diminuisce senza limite quando x ed y crescono senza limite.

271. Che queste due definizioni di un asintoto conducano in generale agli stessi risultati può vedersi considerando diversi esempii, o con la seguente dimostrazione. Sia $y = \mu x + \beta + v$ l'equazione di una curva, in cui μ e β sono costanti, e v diminuisce senza limite quando x ed y crescono senza limite. Dall'equazione data

$$\frac{y}{x} = \mu + \frac{\beta + v}{x}.$$

Quindi μ è il limite di $\frac{y}{x}$ quando x ed y crescono senza limite. Ma, per l'Art. 148,

$$\text{il limite di } \frac{y}{x} = \text{al limite di } \frac{\frac{dy}{dx}}{1} \text{ o } \frac{dy}{dx}.$$

Inoltre β è il limite di $y-\mu x$; ma μ = al limite di $\frac{dy}{dx}$; onde *in generale* β = al limite di $y-\frac{dy}{dx}x$. Quindi l'equazione della tangente alla curva nel punto (x, y), che è

$$y'-y=\frac{dy}{dx}(x'-x),$$

diviene, quando x ed y crescono indefinitamente,

$$y'=\mu x'+\beta;$$

cioè, l'equazione dell'asintoto trovata secondo la prima definizione è la stessa che l'equazione trovata secondo la seconda definizione.

272. Abbiamo detto nell'ultimo articolo che *in generale* il limite di $y-\mu x$ = al limite di $y-\frac{dy}{dx}x$. Supponiamo, per esempio, che l'equazione della curva sia

$$y=Ax+B+\frac{a}{x};$$

onde $$\frac{y}{x}=A+\frac{B}{x}+\frac{a}{x^2}.$$

Quindi μ = al limite di $\frac{y}{x}=A$, ed

$$y-\mu x=B+\frac{a}{x}.$$

Inoltre $$\frac{dy}{dx}=A-\frac{a}{x^2},$$

onde $$y-\frac{dy}{dx}x=B+\frac{2a}{x}.$$

Quì $y-\frac{dy}{dx}x$ ed $y-\mu x$ hanno lo stesso limite, cioè B.

Ma si supponga $y=Ax+B+\frac{a+\operatorname{sen} x}{x}$.

Quì, come sopra, $\mu=A$.

Inoltre $$y - \mu x = B + \frac{a + \operatorname{sen} x}{x}.$$

E $$\frac{dy}{dx} = A + \frac{\cos x}{x} - \frac{a + \operatorname{sen} x}{x^2},$$

onde $$y - \frac{dy}{dx} x = B - \cos x + \frac{2(a + \operatorname{sen} x)}{x}.$$

Quì non possiamo asserire che $y - \mu x$ ed $y - \frac{dy}{dx} x$ hanno lo stesso limite: il limite del primo è B, ma l'altro non si può dire che abbia un limite, a motivo del termine $\cos x$, che non tende ad un limite quando x cresce indefinitamente. In questo caso la curva

$$y = Ax + B + \frac{a + \operatorname{sen} x}{x}$$

ha un asintoto secondo la definizione dell'Art. 270, cioè, $y = Ax + B$, ma non secondo la definizione dell'Art. 267.

La dimostrazione nell'Art. 270 potrebbe, naturalmente, partire dall'equazione $x = \mu y + \beta + v$; sicchè, dovendo l'asintoto essere parallelo all'asse delle y, col prendere la seconda forma evitiamo di avere μ infinito.

273. Finora ci siamo limitati agli asintoti *rettilinei*; ora estendiamo la definizione agli asintoti curvilinei.

Def. Quando la differenza delle ordinate di due curve corrispondenti ad un'ascissa comune diminuisce senza limite, o la differenza delle ascisse corrispondenti ad un'ordinata comune diminuisce senza limite, nel passare da punto a punto lungo l'una e l'altra curva, ciascuna curva si dice essere un asintoto dell'altra.

Quindi, se l'equazione di una curva può essere messa sotto la forma

$$y = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_{n-1} x + A_n + \frac{B_1}{x} + \frac{B_2}{x^2} + \frac{B_3}{x^3} + \dots,$$

allora $y = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_{n-1} x + A_n$

è l'equazione di una curva che è un asintoto della prima. Similmente per

$$y = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_{n-1} x + A_n + \frac{B_1}{x},$$

ed $$y = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_{n-1} x + A_n + \frac{B_1}{x} + \frac{B_2}{x^2},$$

e così di seguito.

Es. Trovare gli asintoti della curva

$$x^3 - xy^2 + ay^2 = 0.$$

Quì $$y^2 = \frac{x^3}{x-a}; \text{ onde } y = \pm \sqrt{\left(\frac{x^3}{x-a}\right)}.$$

Quando x si avvicina al valore a, sì y che $\frac{dy}{dx}$ crescono senza limite, ed $x = a$ è l'equazione di un asintoto rettilineo.

Ponendo y nella forma $\pm x\left(1 - \frac{a}{x}\right)^{-\frac{1}{2}}$, e sviluppando col Teorema del Binomio, abbiamo

$$y = \pm x\left\{1 + \frac{a}{2x} + \frac{3a^2}{8x^2} + \frac{5a^3}{16x^3} + \ldots\right\} \ldots\ldots\ldots (1).$$

Quindi $y = \pm\left(x + \frac{a}{2}\right)$ sono le equazioni di due asintoti rettilinei. Possiamo ottenere quanti asintoti curvilinei vogliamo facendo uso della serie in (1). Per esempio,

$$y = \pm\left(x + \frac{a}{2} + \frac{3a^2}{8x}\right)$$

sono le equazioni di due curve asintotiche di secondo ordine. Lo studente si rammenterà che per l'Art. 114 possiamo usare il teorema del binomio nell'esempio precedente come *un vero sviluppo aritmetico* quando $\frac{a}{x}$ è *minore* dell'unità, il che sarà certamente il caso quando x cresce indefinitamente.

274. Il metodo seguente fornirà gli asintoti rettilinei con grande speditezza in molti esempii. Supponiamo l'equazione di una curva, $F(x, y) = 0$, tale che $F(x, y)$ sia la somma di differenti funzioni *omogenee* di x ed y, sicchè l'equazione possa mettersi sotto la forma

$$x^n \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + x^p \psi\left(\frac{y}{x}\right) + x^q \chi\left(\frac{y}{x}\right) + \ldots = 0 \ldots . (1),$$

in cui n, p, q, sono disposti in ordine decrescente di grandezza. Ogni equazione algebrica razionale intera tra x ed y può essere messa in questa forma. Da (1) abbiamo

$$\varphi\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{x^{n-p}} \psi\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{x^{n-q}} \chi\left(\frac{y}{x}\right) + \ldots = 0 \ldots . (2).$$

Ora nel trovare un asintoto dobbiamo prima per l'Art. 271 stabilire il limite di $\frac{y}{x}$ quando x ed y sono infiniti. Se chiamiamo questo limite μ, e lo supponiamo finito, abbiamo da (2)

$$\varphi(\mu) = 0.$$

Sia μ_1 un valore di μ ottenuto da questa equazione; dobbiamo in seguito trovare il limite di $y - \mu_1 x$. Si ponga $y - \mu_1 x = \beta$, allora da (2)

$$\varphi\left(\mu_1 + \frac{\beta}{x}\right) + \frac{1}{x^{n-p}} \psi\left(\mu_1 + \frac{\beta}{x}\right) + \ldots = 0 \ldots\ldots (3).$$

Ma, per l'Art. 92,

$$\varphi\left(\mu_1 + \frac{\beta}{x}\right) = \varphi(\mu_1) + \frac{\beta}{x} \varphi'\left(\mu_1 + \frac{\theta\beta}{x}\right)$$

$$= \frac{\beta}{x} \varphi'\left(\mu_1 + \frac{\theta\beta}{x}\right),$$

poichè $\varphi(\mu_1) = 0$.

Così (3) diviene

$$\beta \varphi'\left(\mu_1 + \frac{\theta\beta}{x}\right) + \frac{1}{x^{n-p-1}} \psi\left(\mu_1 + \frac{\beta}{x}\right) + \ldots = 0 \ldots . (4).$$

Nell'equazione (4) si supponga x crescere indefinitamente, allora avremo differenti risultati secondo il valore di p.

Se p è *maggiore* di $n-1$ il valore di β è infinito, e non vi è asintoto per la radice μ_1 dell'equazione

$$\varphi(\mu) = 0.$$

Se p è *eguale* ad $n-1$ e $\varphi'(\mu_1)$ non è zero, il limite di β è $-\frac{\psi(\mu_1)}{\varphi'(\mu_1)}$; e l'equazione di un asintoto è

$$y = \mu_1 x - \frac{\psi(\mu_1)}{\varphi'(\mu_1)}.$$

Se p è *minore* di $n-1$ e $\varphi'(\mu_1)$ non è zero, il limite di β è 0 e l'equazione di un asintoto è

$$y = \mu_1 x.$$

In quest'ultimo caso le equazioni

$$y = \mu x, \qquad \varphi(\mu) = 0,$$

danno per determinare gli asintoti

$$\varphi\left(\frac{y}{x}\right) = 0, \quad \text{o} \ x^n \varphi\left(\frac{y}{x}\right) = 0;$$

quindi quando l'equazione di una curva può esibirsi sotto la forma della somma di più funzioni omogenee eguale a zero, ed il grado n della più alta di queste funzioni eccede di più di un'unità il grado di ognuna delle altre, tutti gli asintoti *in generale* passano per l'origine e possono trovarsi eguagliando a zero la funzione omogenea dell'n^{mo} grado. Diciamo *in generale* poichè vi è la limitazione che $\varphi'(\mu_1)$ non deve essere zero; cioè, per la teoria delle equazioni $\varphi(\mu) = 0$ non deve avere *radici eguali.*

275. Consideriamo ora il caso in cui $\varphi'(\mu_1)$ è zero. Prima supponiamo p *eguale* ad $n-1$.

Se $\psi(\mu_1)$ non è zero β diviene infinito, e non vi è asintoto per la radice μ_1 dell'equazione $\varphi(\mu) = 0$. Ma se $\psi(\mu_1) = 0$ il valore di β diviene indeterminato.

Si supponga in questo caso $q=n-2$, sicchè l'equazione (2) dell'Art. 274 dà

$$\varphi\left(\mu_1+\frac{\beta}{x}\right)+\frac{1}{x}\psi\left(\mu_1+\frac{\beta}{x}\right)+\frac{1}{x^2}\chi\left(\mu_1+\frac{\beta}{x}\right)+\ldots=0.$$

Poichè $\varphi(\mu_1)=0$ e $\varphi'(\mu_1)=0$, abbiamo, per l'Art. 92,

$$\varphi\left(\mu_1+\frac{\beta}{x}\right)=\frac{\beta^2}{2x^2}\varphi''\left(\mu_1+\frac{\theta\beta}{x}\right);$$

inoltre $$\psi\left(\mu_1+\frac{\beta}{x}\right)=\frac{\beta}{x}\psi'\left(\mu_1+\frac{\theta_1\beta}{x}\right).$$

Si sostituiscano questi valori nell'equazione precedente, si moltiplichi per x^2, e poi si proceda al limite, ed abbiamo per determinare i valori limiti di β, l'equazione quadratica

$$\frac{\beta^2}{2}\varphi''(\mu_1)+\beta\psi'(\mu_1)+\chi(\mu_1)=0.$$

Se i valori di β sono possibili, otteniamo così due asintoti paralleli.

Se questa equazione quadratica prende una forma indeterminata, possiamo procedere nello stesso modo a formare un'equazione cubica in β.

Nel caso in cui $\varphi'(\mu_1)$ è zero e $\psi(\mu_1)$ non è zero, non vi è asintoto rettilineo per la radice μ_1 dell'equazione $\varphi(\mu)=0$, come abbiamo già stabilito nel principio di questo articolo. In questo caso possiamo in generale ottenere un asintoto *parabolico*, come ora mostreremo.

Per l'Art. 92 $$\varphi\left(\mu_1+\frac{\beta}{x}\right)=\frac{1}{2}\frac{\beta^2}{x^2}\varphi''\left(\mu_1+\frac{\theta\beta}{x}\right).$$

Quindi l'equazione (3) dell'Art. 274 diviene

$$\frac{1}{2}\frac{\beta^2}{x^2}\varphi''\left(\mu_1+\frac{\theta\beta}{x}\right)+\frac{1}{x}\psi\left(\mu_1+\frac{\beta}{x}\right)=0;$$

quando x cresce indefinitamente quest'equazione si avvicina alla forma

$$\frac{1}{2}\frac{\beta^2}{x^2}=-\frac{\psi(\mu_1)}{x\varphi''(\mu_1)},$$

sicchè $$\frac{\beta}{x}=\left\{-\frac{2\psi(\mu_1)}{x\varphi''(\mu_1)}\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Quindi abbiamo un *asintoto parabolico* determinato dall'equazione

$$y - \mu_1 x = x \left\{ \frac{-2\psi(\mu_1)}{x\varphi''(\mu_1)} \right\}^{\frac{1}{2}},$$

cioè,
$$(y - \mu_1 x)^2 = \frac{-2x\psi(\mu_1)}{\varphi''(\mu_1)}.$$

In secondo luogo supponiamo p *minore* di $n-1$. Allora poichè $\varphi'(\mu_1)=0$ l'equazione (4) dell'Art. 274 non determinerà β; ed invece di questa equazione avremo ultimamente nel modo ora mostrato

$$\frac{1}{2}\frac{\beta^2}{x^2} = -\frac{\psi(\mu_1)}{x^{n-p}\varphi''(\mu_1)}.$$

Se $n-p=2$, otteniamo

$$\beta^2 = -\frac{2\psi(\mu_1)}{\varphi''(\mu_1)},$$

sicchè se $\psi(\mu_1)$ e $\varphi''(\mu_1)$ sono di segni diversi abbiamo due valori possibili di β, e quindi due asintoti paralleli i quali sono equidistanti dall'origine.

Se $n-p$ non è eguale a 2, abbiamo un asintoto curvilineo determinato dall'equazione

$$(y - \mu_1 x)^2 = -\frac{2\psi(\mu_1)}{x^{n-p-2}\varphi''(\mu_1)}.$$

276. Abbiamo supposto nell'Art. 274, che il limite di $\frac{y}{x}$ sia *finito;* se non è tale, il limite di $\frac{x}{y}$ sarà zero, e dobbiamo esaminare se vi è un asintoto parallelo all'asse delle y. Questo si può generalmente stabilire con facilità in ogni esempio particolare. O pure possiamo porre l'equazione data nella forma

$$y^n\varphi_1\left(\frac{x}{y}\right) + y^p\psi_1\left(\frac{x}{y}\right) + \ldots = 0,$$

e procedere come sopra.

277. Se una curva è data da un'equazione algebrica razionale intera, possiamo determinare gli asintoti che sono

paralleli all'asse delle y nel seguente modo. Si ordini l'equazione secondo le potenze di y; supposto che essa sia

$$y^n f(x) + y^{n-1} f_1(x) + y^{n-2} f_2(x) + \ldots = 0,$$

allora gli asintoti paralleli all'asse delle y saranno dati dalle radici reali dell'equazione

$$f(x) = 0.$$

Infatti l'equazione della curva può essere scritta

$$f(x) + \frac{f_1(x)}{y} + \frac{f_2(x)}{y^2} + \ldots = 0,$$

ed è chiaro che questa è soddisfatta supponendo $y = \infty$ ed $f(x) = 0$; e che quando y è infinito nessun'altro valore di x eccetto quelli dedotti da $f(x) = 0$ la verificherà. Quindi gli asintoti paralleli all'asse delle y si trovano *eguagliando a zero il coefficiente della più alta potenza di y* nell'equazione della curva.

Similmente gli asintoti paralleli all'asse delle x possono trovarsi eguagliando a zero il coefficiente della più alta potenza di x nell'equazione della curva.

Quando una curva è data da un'equazione algebrica razionale intera, converrà determinare col metodo precedente gli asintoti paralleli agli assi, e quindi procedere per gli altri asintoti secondo la regola seguente; supponiamo l'equazione dell' n^{mo} grado. Si sostituisca per y nell'equazione data $\mu x + \beta$ e si ordinino i termini dell'equazione secondo le potenze di x. Si eguagli a zero il coefficiente di x^n; ciò darà un'equazione per determinare μ; sia μ_1 uno dei valori reali di μ. Indi si esamini il coefficiente di x^{n-1}, e si dia il valore μ_1 a μ se esso si trova in questo coefficiente. Se possiamo determinare β in modo da far svanire questo coefficiente, allora $y = \mu_1 x + \beta$ sarà l'equazione di un asintoto; se il coefficiente non si può far sparire non vi è asintoto corrispondente. Se il coefficiente svanisce qualunque sia il valore di β, allora si ponga il coefficiente di x^{n-2} eguale a zero, sostituendo in esso μ_1 per μ; avremo così generalmente un'equazione quadratica per determinare i valori di β, e se questi valori sono reali, otteniamo due asintoti paralleli. Se il coefficiente di x^{n-2} svanisce, qualunque sia il valore di β, dobbiamo eguagliare a zero il coefficiente di x^{n-3} e così di seguito.

Si può dimostrare facilmente che questa regola è d'accordo con gli Art. 274 e 275. L'equazione (1) dell'Art. 274, si può supporre l'equazione della curva nella quale n è un intero, $p=n-1$, $q=n-2, \ldots\ldots$ Allora se poniamo $\mu x+\beta$ per y, e si ordinano i termini secondo le potenze di x, otterremo l'espressione

$$x^n\varphi(\mu)+x^{n-1}\{\psi(\mu)+\beta\varphi'(\mu)\}+x^{n-2}\{\chi(\mu)+\beta\psi'(\mu)+\frac{\beta^2}{2}\varphi''(\mu)\}+\ldots$$

Così eguagliando a zero il coefficiente di x^n arriviamo all'equazione per determinare μ data nell'Art. 274. Quindi eguagliando a zero il coefficiente di x^{n-1} otterremo lo stesso valore di β trovato nell'Art. 274; o se il coefficiente di x^{n-1} svanisce, qualunque sia β, allora eguagliando a zero il coefficiente di x^{n-2} arriviamo all'equazione quadratica data nell'Art. 275.

Es. (1) $\qquad y^3+x^3-3axy=0.$

Si ponga $\qquad \mu x+\beta$ per y, allora

$$(\mu x+\beta)^3+x^3-3ax(\mu x+\beta)=0;$$

onde $\qquad (\mu^3+1)x^3+3x^2(\mu^2\beta-a\mu)+Mx+N=0.$

Quindi,

$$\mu^3+1=0,$$

$$\mu^2\beta-a\mu=0,$$

sono le equazioni da cui debbono trovarsi μ e β; esse danno $\mu=-1$, $\beta=-a$; quindi,

$$y=-x-a,$$

è l'equazione di un asintoto.

Es. (2). $\qquad x^2(x+y)=a^2(x-y).$

Si ponga $\qquad \mu x+\beta$ per y, allora

$$x^2(x+\mu x+\beta)=a^2(x-\mu x-\beta);$$

onde $\qquad x^3(1+\mu)+\beta x^2-xa^2(1-\mu)+a^2\beta=0.$

Quindi, $\qquad 1+\mu=0$ e $\beta=0$;

onde $y=-x$ è l'equazione di un asintoto.

Es. (3). $xy(y-x)(y-x+3a)+4a^3x-a^4=0.$

Quì il termine che contiene la più alta potenza di y è xy^3; così $x=0$ dà un asintoto, cioè l'asse delle y. Similmente, il termine che contiene la più alta potenza di x è yx^3; onde $y=0$ dà un asintoto, cioè l'asse delle x. Allora si ponga $\mu x+\beta$ per y, ed otteniamo l'espressione

$$x(\mu x+\beta)\{(\mu-1)x+\beta\}\{(\mu-1)x+3a+\beta\}+4a^3x-a^4.$$

Ordinandola secondo le potenze di x, abbiamo

$$x^4\mu(\mu-1)^2+x^3(\mu-1)\{3\mu a+(3\mu-1)\beta\}$$
$$+x^2\{\beta^2(3\mu-2)+3a\beta(2\mu-1)\}+\ldots$$

Si ponga $\mu(\mu-1)^2=0$; abbiamo quindi $\mu=0$, o $\mu=1$; il primo valore di μ condurrà all'asintoto che coincide con l'asse delle x il quale abbiamo già trovato. Il valore $\mu=1$ fa svanire il coefficiente di x^3 nella precedente espressione; onde eguagliamo a zero il coefficiente di x^2, ponendo in esso $\mu=1$. Otteniamo così $\beta^2+3a\beta=0$; così, $\beta=0$, o $\beta=-3a$. Quindi abbiamo per le equazioni degli asintoti $y=x$, ed $y=x-3a$.

Si osserverà che tutte le conclusioni di questo capitolo reggono siano gli assi rettangolari o pure obbliqui.

ESEMPII.

Trovare gli asintoti delle seguenti curve.

1. $y^2(x-2a)=x^3-a^3$. *Ris.* $x=2a$; $y=\pm(x+a)$.
2. $y^3=x^2(2a-x)$. *Ris.* $y=-x+\dfrac{2a}{3}$.
3. $y(a^2+x^2)=a^2(a-x)$. *Ris.* $y=0$.
4. $y^2(ay+bx)=a^2y^2+b^2x^2$. *Ris.* $y=-\dfrac{b}{a}x+2a$.
5. $y^3=(x-a)^2(x-c)$. *Ris.* $y=x-\dfrac{1}{3}(2a+c)$.
6. $xy^2+yx^2=a^3$. *Ris.* $x=0$; $y=0$; $y=-x$.
7. $x^2y^2=a^2(x^2-y^2)$. *Ris.* $y=\pm a$.

8. $4x^3 = (a + 3x)(x^2 + y^2)$

Ris. $y = \pm\left(\frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{2a}{3\sqrt{3}}\right)$ ed $x = -\frac{a}{3}$.

9. $(x + a) y^2 = (y + b) x^2$.

Ris. $x + a = 0, y + b = 0, y = x + b - a$.

10. $(y - 2x)(y^2 - x^2) - a(y - x)^2 + 4a^2(x + y) = a^3$.

Ris. $y = x, y + x = \frac{2a}{3}, \; y - 2x = \frac{a}{3}$.

11. $y^2(x - y)^2 + ax^2(x - y) - 3a^2y^2 - a^4 = 0$.

Ris. $y = x + \frac{a}{2}(1 \pm \sqrt{13})$.

12. $x(x^2 - a^2) - 2y(y^2 - a^2) = 3xy^2 + a^3$.

Ris. $2y = x, y + x - a = 0, y + x + a = 0$.

13. $x^2(x - y)^2 - a^2(x^2 + y^2) = 0$.

Ris. $x = \pm a, y = x \pm a\sqrt{2}$.

14. $(y - x)^2(x^2 - a^2) = a^4$.

15. $y^3 - 3y^2x + 4x^3 + ay^2 + axy - 6ax^2 + 2b^2x - b^2y + c^3 = 0$.

16. Se una curva di terzo grado è riferita a due asintoti come assi, mostrare che la sua equazione sarà della forma

$$xy(ax + by + c) + a'x + b'y + c' = 0,$$

e che l'equazione del terzo asintoto sarà

$$ax + by + c = 0.$$

CAPITOLO XX.

TANGENTI ED ASINTOTI DELLE CURVE RIFERITE A COORDINATE POLARI.

278. Se abbiamo l' equazione di una curva espressa in x ed y, possiamo trasformarla in una tra le coordinate polari ponendo $x = r\cos\theta$ ed $y = r\,\text{sen}\,\theta$. Così r diviene una funzione di θ, e l'equazione di una curva in coordinate polari prende la forma $r = f(\theta)$, o $F(r, \theta) = 0$. In questo caso la curva si chiama una *curva polare* o *spirale*; r si dice il *raggio vettore* e θ l'*angolo vettoriale*.

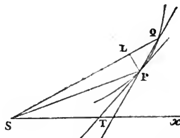
L'angolo (ψ) che la tangente alla curva fa con l'asse delle x è dato dall'equazione

$$\tan\psi = \frac{dy}{dx}, \text{ (Art. 257)}.$$

Quindi, per l'Art. 201,

$$\tan\psi = \frac{\text{sen}\,\theta \dfrac{dr}{d\theta} + r\cos\theta}{\cos\theta \dfrac{dr}{d\theta} - r\,\text{sen}\,\theta}$$

279. *Espressione per l'angolo compreso tra il raggio vettore in un punto di una curva, e la tangente della curva in quel punto.*



Sia P un punto di una curva, le coordinate polari del quale sono r e θ, S essendo il polo.

Sia Q un altro punto, le coordinate del quale sono

$$r + \Delta r, \text{ e } \theta + \Delta\theta.$$

Si tiri PL perpendicolare ad SQ, allora

$$PL = r \operatorname{sen} \Delta\theta,$$
$$LQ = r + \Delta r - r \cos \Delta\theta;$$

onde $$\tan LQP = \frac{r \operatorname{sen} \Delta\theta}{r + \Delta r - r \cos \Delta\theta}.$$

Si avvicini Q lungo la curva a P; la posizione limite di QP è per definizione la tangente della curva in P; sia questa PT. Il limite dell'angolo LQP sarà l'angolo SPT; si chiami questo φ, allora

$$\tan \varphi = \text{limite di} \frac{r \operatorname{sen} \Delta\theta}{r + \Delta r - r \cos \Delta\theta}$$

quando $\Delta\theta$ e Δr diminuiscono indefinitamente.

Ora $$\frac{r \operatorname{sen} \Delta\theta}{r + \Delta r - r \cos \Delta\theta} = \frac{\dfrac{r \operatorname{sen} \Delta\theta}{\Delta\theta}}{\dfrac{2r \operatorname{sen}^2 \dfrac{\Delta\theta}{2}}{\Delta\theta} + \dfrac{\Delta r}{\Delta\theta}}$$

Il limite di $\dfrac{\operatorname{sen} \Delta\theta}{\Delta\theta}$ è 1.

Il limite di $\dfrac{\Delta r}{\Delta\theta}$ è dinotato da $\dfrac{dr}{d\theta}$.

Il limite di $\dfrac{2 \operatorname{sen}^2 \dfrac{\Delta\theta}{2}}{\Delta\theta}$, cioè di $\dfrac{\operatorname{sen} \dfrac{\Delta\theta}{2}}{\dfrac{\Delta\theta}{2}} \operatorname{sen} \dfrac{\Delta\theta}{2}$, è zero.

Quindi $$\tan \varphi = r \frac{d\theta}{dr}.$$

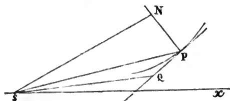
280. Il risultato dell'ultimo articolo si può anche ottenere così,

$$\tan PTx = \frac{\operatorname{sen} \theta \dfrac{dr}{d\theta} + r \cos \theta}{\cos \theta \dfrac{dr}{d\theta} - r \operatorname{sen} \theta}, \text{ (Art. 278).}$$

$PSx = \theta$; onde

$$\tan SPT = \frac{\dfrac{\operatorname{sen}\theta \dfrac{dr}{d\theta} + r\cos\theta}{\cos\theta \dfrac{dr}{d\theta} - r \operatorname{sen}\theta} - \tan\theta}{1 + \dfrac{\tan\theta\left(\operatorname{sen}\theta \dfrac{dr}{d\theta} + r\cos\theta\right)}{\cos\theta \dfrac{dr}{d\theta} - r\operatorname{sen}\theta}} = r\frac{d\theta}{dr} \text{ per la riduzione.}$$

281. *Trovare l'equazione polare della tangente ad una curva.*



Siano $SP = r$, $PSx = \theta$, le coordinate polari del punto di contatto.

Siano $SQ = r'$, $QSx = \theta'$, le coordinate polari di un punto Q della tangente. Dal triangolo SPQ, abbiamo, ponendo $SPQ = \varphi$,

$$\frac{r}{r'} = \frac{\operatorname{sen} SQP}{\operatorname{sen} SPQ} = \frac{\operatorname{sen}(\theta - \theta' + \varphi)}{\operatorname{sen}\varphi}$$
$$= \operatorname{sen}(\theta - \theta')\cot\varphi + \cos(\theta - \theta').$$

Ma $$\tan\varphi = r\frac{d\theta}{dr};$$

onde $$\frac{r}{r'} = \frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta}\operatorname{sen}(\theta - \theta') + \cos(\theta - \theta') \ldots\ldots\ldots (1).$$

Questo risultato si può scrivere,

$$r'\frac{d}{d\theta}r\operatorname{sen}(\theta - \theta') = r^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Se poniamo $\frac{1}{r}=u$, ed $\frac{1}{r'}=u'$, allora

$$-\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta}=\frac{du}{d\theta}.$$

Quindi, dividendo ambo i lati di (1) per r, otteniamo

$$u'=u\cos(\theta-\theta')-\frac{du}{d\theta}\operatorname{sen}(\theta-\theta'),$$

o
$$u'=u\cos(\theta'-\theta)+\frac{du}{d\theta}\operatorname{sen}(\theta'-\theta).$$

282. *Trovare l'equazione polare della normale in un punto di una curva.*

Siano
$$SP=r,\quad PSx=\theta,$$
$$SN=r',\quad NSx=\theta',$$

N essendo un punto della normale; allora

$$\frac{SP}{SN}=\frac{\operatorname{sen}SNP}{\operatorname{sen}SPN}=\frac{\operatorname{sen}\left(\theta'-\theta+\frac{\pi}{2}-\varphi\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)};$$

onde
$$\frac{r}{r'}=\operatorname{sen}(\theta'-\theta)\tan\varphi+\cos(\theta'-\theta)$$

$$=\operatorname{sen}(\theta'-\theta)\frac{rd\theta}{dr}+\cos(\theta'-\theta).$$

Ciò si può scrivere

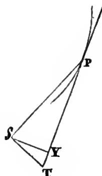
$$r'\frac{d}{d\theta}r\cos(\theta-\theta')=r\frac{dr}{d\theta},$$

e può essere trasformato in

$$u'=u\cos(\theta'-\theta)-u^2\frac{d\theta}{du}\operatorname{sen}(\theta'-\theta).$$

283. Le equazioni polari negli *Art.* 281 e 282, possono anche dedursi dalle equazioni rettangolari della tangente e della normale degli Art. 257 e 258, trasformando queste in coordinate polari, usando il valore di $\frac{dy}{dx}$ dato nell'Art. 278.

284. Da S si tiri SY perpendicolare alla tangente PT; allora



$$SY = r \operatorname{sen} SPT = \frac{r \tan SPT}{\sqrt{(1 + \tan^2 SPT)}}.$$

Quindi, se $SY = p$, abbiamo

$$\frac{1}{p^2} = \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2}\cot^2 SPT = \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2$$

$$= u^2 + \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 \text{ se } u = \frac{1}{r}.$$

285. Da S si tiri ST perpendicolare al raggio vettore, allora ST si chiama la *sottangente polare;* il suo valore è

$$r \tan SPT, \text{ cioè } r^2 \frac{d\theta}{dr}.$$

286. Poichè un asintoto è una tangente che rimane a distanza finita dall'origine quando il punto di contatto si allontana a distanza infinita, se una curva polare ha un asintoto, SP o r deve essere infinito mentre ST rimane finita. Quindi per determinare gli asintoti di una curva polare, dobbiamo prima trovare quei valori di θ, se ve ne sono, che rendono r infinito. Sia α un tale valore di θ; se per questo valore di θ la sottangente polare $r^2\frac{d\theta}{dr}$ è *infinita*, non vi è asintoto corrispondente. Se $r^2\frac{d\theta}{dr}$ è *finita* vi è un asintoto che può essere costruito così: si concepisca una linea tirata da

S sotto un angolo α alla linea iniziale; si tiri da S una linea ad angoli retti alla prima, a *dritta* di essa, se $r^2 \frac{d\theta}{dr}$ è positiva, ed a *sinistra* di essa, se $r^2 \frac{d\theta}{dr}$ è negativa, ed eguale in lunghezza ad $r^2 \frac{d\theta}{dr}$; per l'estremità di questa seconda linea si tiri una linea parallela alla prima, ed essa sarà l'asintoto richiesto.

I termini a *dritta* ed a *sinistra* nella regola precedente debbono intendersi rispetto alla linea che si è tirata prima, l'occhio essendo supposto guardare *lungo* questa linea *da S*.

La *ragione* della regola deve raccogliersi dalla figura dell'Art. 284 e dal principio generale dell'interpetrazione dei segni; in quella figura r cresce con θ, e quindi $r^2 \frac{d\theta}{dr}$ è positiva. Se tracciamo una figura in cui r diminuisca quando θ cresce, sicchè $\frac{dr}{d\theta}$ e la sottangente polare siano *negative*, troveremo che ST' cade a *sinistra* di SP.

287. Es. $$r = \frac{a\theta}{\operatorname{sen}\theta}.$$

Qui r è infinito quando θ è un multiplo di π.

Inoltre $$\frac{dr}{d\theta} = \frac{a(\operatorname{sen}\theta - \theta\cos\theta)}{\operatorname{sen}^2\theta};$$

onde $$r^2 \frac{d\theta}{dr} = \frac{a\theta^2}{\operatorname{sen}\theta - \theta\cos\theta}.$$

Quindi, quando $\operatorname{sen}\theta = 0$, il valore della sottangente polare è $-\frac{a\theta}{\cos\theta}$.

Quando $\theta = \pi$, la sottangente polare $= a\pi$.

Quando $\theta = 2\pi$, la sottangente polare $= -2a\pi$,

e generalmente quando $\theta = n\pi$, la sottangente polare $= (-1)^{n-1} na\pi$.

Per tirare il primo asintoto, pel quale $\theta = \pi$, l'occhio deve supporsi guardare da S lungo la direzione *opposta* ad Sx, e quindi misurare da S perpendicolarmente ad Sx e verso

la dritta, una linea di lunghezza $a\pi$; una linea parallela alla linea iniziale e ad una distanza $a\pi$ da essa è l'asintoto richiesto.

Per tirare il secondo asintoto, pel quale $\theta=2\pi$, l'occhio deve supporsi guardare lungo Sx, e quindi misurare a *sinistra* (poichè la sottangente è negativa) una lunghezza $2a\pi$. Quindi l'asintoto è parallelo alla linea iniziale ad una distanza $2a\pi$ da essa, e al *di sopra* della linea iniziale.

Procedendo in questo modo troviamo un numero infinito di asintoti paralleli ed equidistanti, e tutti al *di sopra* di Sx.

Se attribuiamo a θ valori negativi, otterremo in simil modo una serie di asintoti tutti paralleli ad Sx, ed equidistanti, situati al di sotto di Sx.

ESEMPII.

1. Nella curva $r = a \operatorname{sen}\theta$, mostrare che $\varphi = \theta$.

2. Determinare i punti della curva $r=a(1+\cos\theta)$ nei quali la tangente è parallela alla linea iniziale.

3. Mostrare che nella curva $r\theta=a$ la sottangente polare è di lunghezza costante.

4. Nella curva $r(ae^{\theta}+be^{-\theta})=ab$, la lunghezza della sottangente polare è $-\dfrac{ab}{ae^{\theta}-be^{-\theta}}$.

5. In una sezione conica, il fuoco essendo il polo, il luogo dell'estremità della sottangente polare è una linea retta perpendicolare all'asse maggiore.

6. Trovare l'angolo tra il raggio vettore e la tangente in un punto di un'ellisse, (1) il fuoco essendo il polo, (2) il centro essendo il polo. Determinare in ciascun caso quando l'angolo è un massimo.

7. Se $r=a(1-\cos\theta)$, allora $\varphi=\dfrac{\theta}{2}$, $p=2a\operatorname{sen}^3\dfrac{\theta}{2}$, e la sottangente polare $=2a\operatorname{sen}^2\dfrac{\theta}{2}\tan\dfrac{\theta}{2}$.

8. Se $r^2 \cos 2\theta = a^2$, mostrare che $\operatorname{sen} \varphi = \frac{a^2}{r^2}$.

9. Se $r^2 = a^2 \cos 2\theta$, mostrare che $\varphi = \frac{\pi}{2} + 2\theta$.

10. Se $r = a \sec^3 \frac{\theta}{3}$, mostrare che il luogo di Y è una parabola. Si vegga la figura nell'Art. 284.

11. Se $r = a(1 + \cos\theta)$, mostrare che il luogo di Y è determinato da $r = 2a\left(\cos\frac{\theta}{3}\right)^3$.

12. Se $r^2 = a^2 \cos 2\theta$, mostrare che il luogo di Y è determinato da $r^2 = a^2\left(\cos\frac{2\theta}{3}\right)^3$.

13. Mostrare che la curva $r \cos\theta = a \cos 2\theta$ ha un asintoto che ha per equazione $r\cos\theta = -a$.

14. Mostrare che la curva $(r - a) \operatorname{sen}\theta = b$ ha un asintoto che ha per equazione $r \operatorname{sen}\theta = b$.

15. Determinare gli asintoti della curva $r \cos 2\theta = a$.

16. Determinare gli asintoti della curva

$$r \operatorname{sen} 4\theta = a \operatorname{sen} 3\theta.$$

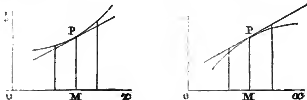
CAPITOLO XXI.

CONCAVITÀ E CONVESSITÀ.

288. Le parole concavo, e convesso, ordinariamente non si definiscono nelle opere sul Calcolo Differenziale, ma sono adoperate nel loro significato ordinario. La definizione seguente non pertanto è stata data: « Una curva si dice essere concava in uno dei suoi punti rispetto ad una data linea, quando nel passare per quel punto i suoi due rami sono inizialmente racchiusi *dentro* l'angolo acuto formato dalla linea data e dalla tangente alla curva in quel punto. Quando, al contrario, i due rami sono inizialmente *fuori* di quest'angolo, la curva si dice essere convessa in quel punto rispetto alla linea ».

289. *Trovare un carattere della convessità o concavità di una curva.*

Sia P un punto di una curva di cui le coordinate sono x, y.



Si tiri la tangente in P; allora se nel punto P la curva è *convessa* verso l'asse delle x, le ordinate della curva corrispondenti alle ascisse $x+h$ debbono essere maggiori delle ordinate corrispondenti della tangente in P, h avendo un valore qualunque compreso tra un limite finito e zero: se la curva è *concava*, le ordinate della curva debbono essere minori delle ordinate della tangente. Ciò può dedursi dalla definizione dell'Art. 288; o se omettiamo quella definizione esso può an-

cora prendersi come una conseguenza del significato dei termini *concavo* e *convesso*.

Dinoti y_1 l'ordinata della curva corrispondente all'ascissa $x+h$, ed y_2 l'ordinata corrispondente della tangente in P. Se $y=\varphi(x)$ è l'equazione della curva, abbiamo

$$y_1=\varphi(x)+h\varphi'(x)+\frac{h^2}{\underline{|2}}\varphi''(x+\theta h).$$

E poichè l'equazione della tangente in P è

$$Y-y=\varphi'(x)(X-x),$$

abbiamo

$$y_2=\varphi(x)+h\varphi'(x);$$

onde

$$y_1-y_2=\frac{h^2}{2}\varphi''(x+\theta h).$$

Questo, se prendiamo h sufficientemente piccolo, avrà lo stesso segno di $\varphi''(x)$; e quindi se $\varphi''(x)$ è positivo la curva è convessa all'asse delle x, e concava se $\varphi''(x)$ è negativo.

Abbiamo supposto nelle figure che la curva sia *al di sopra* dell'asse delle x. Se essa è *al di sotto* dell'asse delle x, allora $-y_1$ e $-y_2$ sono i valori *numerici* delle ordinate, e la curva è convessa se $-y_1+y_2$ è positivo, cioè, se $\varphi''(x)$ è negativo, e concava se $\varphi''(x)$ è positivo.

Tutti e due i casi possono racchiudersi in un solo enunciato, così, « Una curva è convessa o concava all'asse delle x secondo che $y\frac{d^2y}{dx^2}$ è positivo o negativo. »

290. Def. Un punto d'inflessione è un punto nel quale una curva sega la sua tangente in quel punto.

Trovare le condizioni per l'esistenza di un punto d'inflessione. Sia $y=\varphi(x)$ l'equazione di una curva; siano x, y, le coordinate di un punto della curva, ed $x+h, y_1$, le coordinate di un punto adiacente. Si tiri la tangente alla curva

nel punto (x, y), e sia y_2 l'ordinata di questa tangente corrispondente all'ascissa $x+h$. Allora

$$y_1 = \varphi(x) + h\varphi'(x) + \frac{h^2}{2}\varphi''(x+\theta h),$$

$$y_2 = \varphi(x) + h\varphi'(x);$$

onde

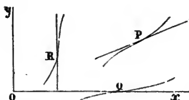
$$y_1 - y_2 = \frac{h^2}{2}\varphi''(x+\theta h).$$

Quindi, se $\varphi''(x)$ non è zero, il segno di $y_1 - y_2$, se h è sufficientemente piccolo, sarà lo stesso che quello di $\varphi''(x)$, per h sì positivo che negativo, e la curva non può tagliare la sua tangente. Quindi se vi è un punto d'inflessione, dobbiamo avere $\varphi''(x) = 0$. Supponiamo questa condizione soddisfatta, allora

$$y_1 - y_2 = \frac{h^3}{\underline{|3}}\varphi'''(x+\theta h):$$

e questa espressione muta di segno con h, purchè $\varphi'''(x)$ non sia zero. Se $\varphi'''(x)$ è zero, si può mostrare che $\varphi''''(x)$ deve anche svanire; e generalmente se per un certo valore di x più coefficienti differenziali successivi di y svaniscono, cominciando dal secondo, vi è un punto d'inflessione se il primo coefficiente differenziale che *non* svanisce è di ordine *dispari*.

Poichè generalmente in un punto d'inflessione $\frac{d^2y}{dx^2}$ *svanisce* mentre $\frac{d^3y}{dx^3}$ *è finito*, $\frac{d^2y}{dx^2}$ muta di segno. Infatti $\frac{d^3y}{dx^3}$ è il coefficiente differenziale di $\frac{d^2y}{dx^2}$; onde per l'Art. 89 se $\frac{d^3y}{dx^3}$ è positivo $\frac{d^2y}{dx^2}$ cresce con x, e se $\frac{d^3y}{dx^3}$ è negativo $\frac{d^2y}{dx^2}$ decresce al crescere di x. Quindi $\frac{d^2y}{dx^2}$ deve passare dal negativo al positivo se $\frac{d^3y}{dx^3}$ è positivo, e dal positivo al negativo se $\frac{d^3y}{dx^3}$ è negativo.

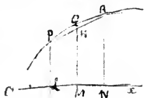


291. Nella figura precedente P, Q, R, sono punti d'inflessione per le curve che passano per essi. In P vi è un cambiamento dalla concavità alla convessità rispetto all'asse delle x. In Q vi è un punto d'inflessione, ma la curva dai due lati di Q è convessa all'asse delle x. Ciò si accorda con l'Art. 289; poichè, se y e $\frac{d^2y}{dx^2}$ mutano entrambi di segno, non si ha cambiamento nel segno del loro prodotto. In R abbiamo un punto d'inflessione nel quale $\frac{dy}{dx}$ è infinito e quindi anche $\frac{d^2y}{dx^2}$ è infinito per l'Art. 113, il quale caso non è incluso nell'investigazione dell'Art. 290. Dovremmo perciò in ogni esempio stabilire se $\frac{d^2y}{dx^2}$ può divenire infinito, e se ciò ha luogo dobbiamo esaminare questo caso particolarmente. Possiamo tracciare la curva nelle vicinanze di quel punto, o possiamo esaminare il segno di $\frac{d^2y}{dx^2}$ per valori di x che differiscono pochissimo da quello che dà origine al valore infinito, e così determinare se la curva è concava o convessa nelle vicinanze del punto in quistione.

Se consideriamo y come la variabile indipendente, possiamo mostrare come negli articoli precedenti, che una curva è convessa o concava all'asse delle y, secondo che $x\frac{d^2x}{dy^2}$ è positivo o negativo, e che in un punto d'inflessione $\frac{d^2x}{dy^2}$ deve svanire o mutare di segno. Questo è spesso utile nei casi in cui $\frac{d^2y}{dx^2}$ diviene infinito.

292. Il legame tra $\frac{d^2y}{dx^2}$ e la concavità o convessità di una curva, può anche mostrarsi così.

Siano PL, QM, RN tre ordinate equidistanti. Si tiri la corda PR che incontra QM in H. Sia $y = \varphi(x)$ l'equazione della curva; siano x, y, le coordinate di P; $LM = MN = h$. Se la curva è *concava* all'asse delle x, QM è *maggiore* di HM; e quindi $2QM$ maggiore di $2HM$, cioè, maggiore di $PL + RN$. Quindi



$$\varphi(x + 2h) - 2\varphi(x + h) + \varphi(x) \text{ è negativa},$$

e quindi anche

$$\frac{\varphi(x + 2h) - 2\varphi(x + h) + \varphi(x)}{h^2} \text{ è negativa.}$$

Diminuisca h indefinitamente, e segue dall'Art. 127, che $\varphi''(x)$ è negativo. Similmente, se la curva è convessa $\varphi''(x)$ è positivo.

293. Indicheremo brevemente un altro metodo col quale alle volte si ottengono i risultati di questo capitolo. O si deduce da una definizione della concavità e della convessità, o si dà come definizione di queste parole, che una curva è *convessa* all'asse delle x, (y essendo supposto positivo,) se $\frac{dy}{dx}$ è crescente, cioè, se $\frac{d^2y}{dx^2}$ è positivo, e *concava* se $\frac{dy}{dx}$ è decrescente, cioè, se $\frac{d^2y}{dx^2}$ è negativo.

Inoltre un punto d'inflessione si può definire come un punto in cui la curva cambia dall'essere concava all'essere convessa o *viceversa*. Quindi $\frac{d^2y}{dx^2}$ deve mutare di segno in un punto d'inflessione.

Un punto d'inflessione si può anche definire come un punto nel quale l'inclinazione della tangente all'asse ha un valore massimo o minimo. Poichè quando quest'angolo ha un valore massimo o minimo, lo stesso avviene per la sua tangente, dobbiamo avere $\frac{dy}{dx}$ un massimo o un minimo in un punto d'inflessione. Quindi $\frac{d^2y}{dx^2}$ deve mutare di segno.

294. Una curva riferita a coordinate polari si dice essere concava o convessa al polo in un punto, secondo che la curva nelle vicinanze di quel punto giace, o no, dalla stessa parte della tangente insieme al polo.

Se p è la perpendicolare dal polo sulla tangente in un punto di cui le coordinate sono r, θ, si vedrà da una figura, che se la curva è *concava* al polo, p cresce se r cresce, e decresce se r decresce; quindi $\frac{dp}{dr}$ deve essere *positivo*. Similmente se la curva è *convessa* al polo $\frac{dp}{dr}$ deve essere *negativo*. Così in un punto d'inflessione $\frac{dp}{dr}$ deve mutare segno.

295. Poichè $$\frac{1}{p^2} = u^2 + \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2, \text{ Art. } 284,$$

onde $$-\frac{1}{p^3}\frac{dp}{d\theta} = \left(u + \frac{d^2u}{d\theta^2}\right)\frac{du}{d\theta};$$

quindi $$\frac{dp}{du} = -p^3\left(u + \frac{d^2u}{d.^2}\right).$$

Ma $$\frac{dp}{dr} = \frac{dp}{du}\frac{du}{dr} = -\frac{1}{r^2}\frac{dp}{du}$$
$$= \frac{p^3}{r^2}\left(u + \frac{d^2u}{d\theta^2}\right).$$

Quindi, in un punto d'inflessione dobbiamo avere generalmente che $u + \frac{d^2u}{d\theta^2}$ muti di segno.

ESEMPII.

1. Se $y = \frac{x^3}{a^2 + x^2}$, vi è un punto d'inflessione nell'origine, ed un altro quando $x = \pm a\sqrt{3}$.

2. Se $y = \frac{x^2(x+a)}{a(x-a)}$, vi è un punto d'inflessione quando $x = -a(\sqrt[3]{2} - 1)$.

3. Se $y(a^4 - b^4) = x(x-a)^4 - xb^4$, vi è un punto d'inflessione quando $x = \frac{2a}{5}$. Vi è un punto d'inflessione quando $x = a$?

4. Se $\frac{y}{a} = \sqrt{\left(\frac{a-x}{x}\right)}$, vi è un punto d'inflessione quando $x = \frac{3a}{4}$.

5. Se $\frac{y}{a} = \frac{x^2}{a^2} + \left(\frac{x-a}{a}\right)^{\frac{3}{5}}$, vi è un punto d'inflessione quando $x = a$.

6. Se $x^{\frac{4}{3}} = \log y$, vi è un punto d'inflessione quando $x = 8$.

7. Se $ax^2 - x^2y - a^2y = 0$, vi è un punto d'inflessione quando $x = \pm\frac{a}{\sqrt{3}}$.

8. Se $\frac{y}{a} = \sqrt{\left(\frac{x}{2a-x}\right)}$, vi è un punto d'inflessione quando $x = \frac{a}{2}$.

9. Se $xy = a^2 \log\frac{x}{a}$, vi è un punto d'inflessione quando $x = ae^{\frac{3}{2}}$.

10. Trovare il punto d'inflessione della curva,

$$\{y - 2\sqrt[3]{(a^2x)}\}^2 = 4ax. \qquad \textit{Risultato. } x = \left(\frac{8}{9}\right)^6 a.$$

11. Se $y(x^2 + a^2) = a^2(a - x)$, vi sono tre punti d'inflessione che giacciono in linea retta.

12. Se $r = \frac{a\theta^2}{\theta^2 - 1}$, vi è un punto d'inflessione quando $r = \frac{3a}{2}$.

13. Se $r = b.\theta^n$, vi è un punto d'inflessione quando

$$r = b\,\{-n(n+1)\}^{\frac{n}{2}}.$$

14. Se $x = a(1 - \cos\varphi)$, ed $y = a(n\varphi + \operatorname{sen}\varphi)$, vi è un punto d'inflessione quando $\cos\varphi = -\frac{1}{n}$.

CAPITOLO XXII.

PUNTI SINGOLARI.

296. Sotto il titolo comune di « Punti singolari » si comprendono tutti quei punti di una curva che presentano qualche particolarità dipendente dalla curva stessa ed indipendente dalla posizione degli assi coordinati. Procediamo a definire i differenti punti singolari e ad investigare le condizioni della loro esistenza.

Punti d'inflessione.

297. Questi punti sono stati considerati negli Art. 288–295; la condizione della loro esistenza è che $\frac{d^2y}{dx^2}$ muti di segno.

Punti multipli.

298. Def. Un punto multiplo è un punto pel quale passano due o più rami di una curva.

Sia $\varphi(x, y) = 0$ una equazione in una forma *razionale;* per l' Art. 177

$$\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dy}\frac{dy}{dx} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Ora poichè due o più rami di una curva passano per un punto multiplo, sarà possibile di tirare più di una tangente alla curva in quel punto; quindi $\frac{dy}{dx}$ deve ammettere più di un valore. Ma poichè l' equazione $\varphi(x, y) = 0$ è supposta *razionale*, $\frac{d\varphi}{dx}$ e $\frac{d\varphi}{dy}$ avranno ciascuno un solo valore per i dati

valori di x ed y. Quindi dall'equazione (1) $\frac{dy}{dx}$ non può avere più di un valore a meno che non siano

$$\frac{d\varphi}{dx}=0, \qquad \text{e } \frac{d\varphi}{dy}=0.$$

Queste adunque sono le condizioni per l'esistenza di un punto multiplo. Se possono trovarsi valori di x ed y che soddisfano queste equazioni e l'equazione della curva, allora per tali valori di x ed y abbiamo, per l'Art. 181,

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}+2\frac{d^2\varphi}{dx\,dy}\frac{dy}{dx}+\frac{d^2\varphi}{dy^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0 \ldots\ldots (2).$$

Da questa equazione quadratica possiamo trovare due valori di $\frac{dy}{dx}$, e così determinare due tangenti che si possono tirare nel punto multiplo. In questo caso il punto multiplo si chiama un punto doppio.

Se la precedente equazione prende una forma indeterminata per l'annullarsi di $\frac{d^2\varphi}{dx^2}$, $\frac{d^2\varphi}{dx\,dy}$, e $\frac{d^2\varphi}{dy^2}$, per i valori di x ed y che si considerano, abbiamo, per l'Art. 184,

$$\frac{d^3\varphi}{dx^3}+3\frac{d^3\varphi}{dx^2\,dy}\frac{dy}{dx}+3\frac{d^3\varphi}{dx\,dy^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{d^3\varphi}{dy^3}\left(\frac{dy}{dx}\right)^3=0 \ldots\ldots (3).$$

Quest'equazione cubica dà tre valori di $\frac{dy}{dx}$; se essi sono tutti reali, *tre* tangenti della curva passano pel punto che si considera; il punto si chiama allora un punto triplo.

Se l'equazione (3) prende una forma indeterminata per l'annullarsi dei coefficienti delle diverse potenze di $\frac{dy}{dx}$, dobbiamo procedere alla *quarta* equazione derivata di $\varphi(x, y)=0$, ed otteniamo così un'equazione biquadratica per determinare $\frac{dy}{dx}$.

299. Se i due valori di $\frac{dy}{dx}$ forniti dall'equazione (2) dell'Art. 298 sono eguali, i due rami che passano pel punto in quistione hanno una tangente comune in quel punto. In

questo caso, però, il metodo col quale siamo giunti all'equazione (2) non è soddisfacente, poichè nell'ottenerla abbiamo supposto che $\frac{dy}{dx}$ abbia più di *un solo* valore. Ma come in questo caso due rami diversi della curva passano per lo stesso punto, vi saranno generalmente *due differenti valori* di $\frac{d^2y}{dx^2}$; per l'Art. 181,

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}+2\frac{d^2\varphi}{dx\,dy}\frac{dy}{dx}+\frac{d^2\varphi}{dy^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{d\varphi}{dy}\frac{d^2y}{dx^2}=0.$$

e poichè $\varphi(x, y)$ è razionale, ciascuno dei coefficienti differenziali di φ ha solamente un valore; quindi se $\frac{d\varphi}{dy}$ è differente da zero $\frac{d^2y}{dx^2}$ può avere *solamente un valore*. Ma, per supposizione $\frac{d^2y}{dx^2}$ ha più di un valore; quindi $\frac{d\varphi}{dy}=0$ è la condizione che deve verificarsi nel punto in cui due rami si toccano. Poichè $\frac{d\varphi}{dy}=0$, segue da (1) dell'Art. 298 che $\frac{d\varphi}{dx}$ anche $=0$.

Se $\frac{d^2y}{dx^2}$ avesse due valori *eguali*, allora il ragionamento di questo articolo potrebbe applicarsi a $\frac{d^3y}{dx^3}$ ed alla *terza* equazione derivata di $\varphi(x, y)=0$; e si dedurrebbe lo stesso risultato come sopra.

I punti in cui due o più valori di $\frac{dy}{dx}$ sono eguali si chiamano « Punti di Osculazione ».

300. Es. Sia $y^2-x^2(1-x^2)=0$.

Quì $\frac{d\varphi}{dy}=2y$, $\frac{d\varphi}{dx}=-2x(1-x^2)+2x^3$.

Quindi $x=0$, $y=0$, sono le coordinate di un punto che *può* essere un punto doppio. L'equazione (2) dell'Art. 298 diviene

$$1-\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0,$$

onde $\frac{dy}{dx}=\pm 1$, e vi è un punto doppio.

Possiamo in questo caso porre la data equazione nella forma

$$y = \pm x \sqrt{(1 - x^2)},$$

e da questa vediamo che per valori di x compresi tra 0 ed 1, positivi e negativi, y è possibile, e che vi sono *due* valori di y per ogni valore di x. Quando $x = 0$ i due valori di y diventano eguali; ma poichè

$$\frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{(1 - x^2)} \mp \frac{x^2}{\sqrt{(1 - x^2)}},$$

vediamo che quando $x = 0$ vi sono *due* valori di $\frac{dy}{dx}$. Quindi, invece di liberare un'equazione dai radicali in modo da ridurla ad una forma *razionale*, e quindi applicare il metodo dell'Art. 298, possiamo spesso trovare un punto multiplo più facilmente osservando quali valori di x fanno *svanire uno dei radicali nel valore di* y.

Cuspidi.

301. Def. Una cuspide è un punto di una curva nel quale due rami incontrano una tangente comune e si fermano in quel punto. Se i due rami giacciono in parti *opposte* della tangente comune, la cuspide si dice essere della *prima* specie; se dalla *stessa* parte, la cuspide si dice essere della *seconda* specie.

Poichè una cuspide è realmente un punto multiplo, se esiste una cuspide nella curva $\varphi(x, y) = 0$ in un punto, dobbiamo avere

$$\frac{d\varphi}{dx} = 0, \quad \text{e} \quad \frac{d\varphi}{dy} = 0,$$

in quel punto. Per distinguere una cuspide da un ordinario punto multiplo, dobbiamo tracciare la curva nelle vicinanze del punto in quistione.

Es. Sia $$(cy - bx)^2 - \frac{(x - a)^3}{a} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Quì quando $x = a$ ed $y = \frac{ab}{c}$ l'equazione della curva è soddisfatta ed anche

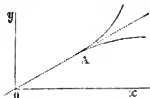
$$\frac{d\varphi}{dx} = 0, \quad \text{e} \quad \frac{d\varphi}{dy} = 0.$$

Ponendo l'equazione data nella forma

$$y = \frac{bx}{c} \pm \frac{1}{c}\sqrt{\left\{\frac{(x-a)^3}{a}\right\}} \ldots\ldots\ldots\ldots (2),$$

vediamo che y è impossibile finchè x è minore di a, e che quando x è maggiore di a vi sono due valori di y per ogni valore di x. Quando $x = a$ il radicale in y svanisce, ed i due valori di y diventano eguali; nello stesso tempo $\frac{dy}{dx}$ ha solamente *un* valore, cioè $\frac{b}{c}$. Quindi vi è una cuspide.

Nella figura, A rappresenta la cuspide; la linea OA ha per sua equazione $y = \frac{bx}{c}$; e poichè dei due valori di y dati dall'equazione (2), uno è *maggiore* e l'altro *minore* di $\frac{bx}{c}$, è chiaro che i due rami giacciono in parti *opposte* di OA, e la cuspide in A è della *prima* specie. Generalmente la cuspide è della *prima* specie se i due valori di $\frac{d^2y}{dx^2}$ infinitamente vicini al punto sono di segni *contrarii*, e di seconda specie se sono dello *stesso* segno.



Le cuspidi della prima specie sono state chiamate « cuspidi ceratoidi » e quelle della seconda « cuspidi ramfoidi. »

Punti coniugati.

302. Def. Un punto coniugato è un punto *isolato* le coordinate del quale soddisfano l'equazione della curva. Per esempio, sia

$$y^2 = \frac{x^2}{a^2}(x^2 - a^2).$$

Quì i valori $x = 0$, $y = 0$, soddisfano l'equazione della curva, ma nessun ramo della curva passa per il punto così determinato, y essendo impossibile per tutt'i valori di x compresi tra 0 ed a. Quindi l'origine delle coordinate è un punto coniugato in questa curva.

Nell'esempio precedente, poichè

$$y = \pm \frac{x}{a} \sqrt{(x^2 - a^2)},$$

troviamo che il valore di $\frac{dy}{dx}$ è impossibile quando $x = 0$; ma $\frac{dy}{dx}$ *può* essere possibile in un punto coniugato; per esempio, sia

$$y = \pm \frac{x^2}{a^2} \sqrt{(x^2 - a^2)}.$$

Quì, quando $x = 0$, abbiamo $\frac{dy}{dx} = 0$; ma l'origine è un punto coniugato, poichè $x = 0$, $y = 0$, soddisfano all'equazione, ed y è impossibile per tutti gli altri valori di x tra $-a$ ed a. In simil modo $\frac{d^2y}{dx^2}$ o un numero qualunque dei coefficienti differenziali di y *può* essere possibile in un punto coniugato, ma essi non possono essere *tutti* possibili, poichè se fossero tali non si avrebbe nulla per distinguere il punto in quistione da un ordinario punto della curva.

Trovare la condizione per l'esistenza di un punto coniugato. Poichè in un punto coniugato i valori dei coefficienti differenziali di y non possono essere tutti possibili, sia l'n^{mo} coefficiente differenziale di y il primo che è impossibile. Supponiamo l'equazione della curva messa in una forma razionale, e dinotata da $\varphi(x, y) = 0$. Si prenda l'n^{ma} equazione derivata; abbiamo

$$\frac{d\varphi}{dy} \frac{d^n y}{dx^n} + \ldots\ldots + \frac{d^n \varphi}{dx^n} = 0,$$

in cui i termini non scritti contengono i coefficienti differenziali di φ rispetto ad x ed y, ed anche i coefficienti differenziali di y rispetto ad x di ordini inferiori all'n^{mo}. Quindi se $\frac{d\varphi}{dy}$ non è zero il valore di $\frac{d^n y}{dx^n}$ fornito dall'equazione precedente sarà possibile; sicchè $\frac{d\varphi}{dy} = 0$ è una condizione necessaria per l'esistenza di un punto coniugato; ma

$$\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dy} \frac{dy}{dx} = 0,$$

quindi anche $\frac{d\varphi}{dx} = 0$.

303. Si fa manifesto dagli articoli precedenti che se $\varphi(x, y)=0$ è l'equazione di una curva, dobbiamo avere in un ordinario punto multiplo, in una cuspide, ed in un punto coniugato,

$$\frac{d\varphi}{dx}=0, \text{ e } \frac{d\varphi}{dy}=0.$$

Quindi, quando abbiamo trovato i valori di x ed y che soddisfano queste tre equazioni, dobbiamo, esaminando la curva particolare, e tracciandola nelle vicinanze del punto in quistione, determinare quale specie di punto singolare esista.

Passiamo ora ad alcuni altri punti singolari che s'incontrano raramente, e, come lo studente sperimenterà, mai si presentano nelle curve di cui le equazioni sono di una forma *algebrica*. Si vegga l'Art. 6.

Punti di fermata.

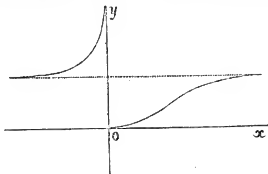
304. Un *punto di fermata* è un punto nel quale un singolo ramo di una curva bruscamente si ferma.

Es. Sia $y=x\log x$.

Quì quando $x=0$ abbiamo $y=0$; ma se x è negativo, y diviene impossibile. Quindi l'origine è un *punto di fermata*.

Inoltre, sia $y=e^{-\frac{1}{x}}$.

Quì se x si rende indefinitamente piccolo e *positivo*, abbiamo che y si avvicina al limite zero; ma se x è *negativo* ed indefinitamente piccolo, y è indefinitamente grande.



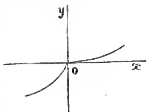
Quindi la curva ha la forma rappresentata nella figura, l'origine essendo un *punto di fermata;* la linea punteggiata è un asintoto che ha per sua equazione $y=1$.

305. Un *punto saliente* è un punto nel quale due rami di una curva s'incontrano e si fermano senza avere una tangente comune.

Es. Sia $$y = \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}},$$

onde $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}} + \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x\,(1 + e^{\frac{1}{x}})^2}.$$

Quì, se x è *positivo* e si avvicina a zero come suo limite, abbiamo in fine $y = 0$ e $\frac{dy}{dx} = 0$; ma se x è *negativo*, abbiamo in fine $y = 0$ e $\frac{dy}{dx} = 1$. Quindi nell'origine due rami s'incontrano, l'uno avendo l'asse delle x per sua tangente, e l'altro inclinato all'asse delle x sotto un angolo di 45.°



Rami punteggiati.

306. Se una curva ha un numero *infinito* di punti coniugati, questa serie di punti si dice un *ramo punteggiato*.

Per esempio, si supponga $y^2 = x \operatorname{sen}^2 x$; per tutt'i valori positivi di x vi sono due valori possibili di y, ma quando x è negativo y è impossibile, a meno che x sia un multiplo di π. Quindi abbiamo un *numero infinito* di punti coniugati situati sull'asse delle x e formando un *ramo punteggiato*.

ESEMPII.

1. Se $a^2y^2 = a^2x^2 - x^4$ vi è un punto multiplo nell'origine.
2. Nelle curve seguenti vi è un punto d'inflessione nell'origine,
$$y = \operatorname{sen} x;\quad y = x \cos x;\quad y = \tan x;\quad y = x^2 \tan x.$$
3. Se $y = \varphi(x) + (x - a)^{\frac{2p+1}{2q}} F(x)$, quando $x = a$, vi è una cuspide della prima specie se $\frac{2p+1}{2q}$ è maggiore di 1 e minore di 2, ed una cuspide della seconda specie se $\frac{2p+1}{2q}$ è maggiore di 2.

4. Le curve seguenti hanno cuspidi all'origine,

$$y^2 = x^3; \quad (y-x)^2 = x^3; \quad (y-x^2)^2 = x^5.$$

5. La curva $y^3 = (x-a)^2(x-c)$ ha una cuspide della prima specie nel punto $x = a$.

6. La curva $(xy+1)^2 + (x-1)^3(x-2) = 0$ ha una cuspide della prima specie nel punto $x = 1$.

7. La curva $y - b = (x-a)^{\frac{4}{3}} + (x-a)^{\frac{3}{4}}$ ha una cuspide della seconda specie nel punto $x = a$.

8. La curva $x^4 - 2ax^2y - axy^2 + a^2y^2 = 0$ ha una cuspide della seconda specie nell'origine.

9. La curva $x^4 - ax^2y - axy^2 + a^2y^2 = 0$ ha un punto coniugato nell'origine.

10. La curva $x^4 - 2ay^3 - 3a^2y^2 - 2a^2x^2 + a^4 = 0$ ha un punto doppio quando $x = \pm a$, e $\frac{dy}{dx}$ allora $= \pm\sqrt{\frac{4}{3}}$; inoltre un punto doppio quando $y = -a$, e $\frac{dy}{dx}$ allora $= \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$.

11. Se $ay^2 = (x-a)^2(x-b)$, quando $x = a$ vi è un punto coniugato se a è minore di b, un punto doppio se a è maggiore di b, ed una cuspide se $a = b$.

12. Mostrare che la curva $ay^2 - x^3 + bx^2 = 0$ ha un punto coniugato nell'origine ed un punto d'inflessione quando $x = \frac{4b}{3}$.

13. Trovare i punti d'inflessione nelle curve seguenti,

$$y^2(1+x^2) = (1-x+x^2)^2; \quad r^2\theta = a^2; \quad r\theta \operatorname{sen}\theta = a.$$

14. Trovare i punti singolari nelle curve seguenti,

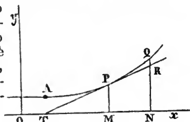
$$(y+x+1)^2 = (1-x)^5; \quad y^4 - axy^2 + x^4 = 0;$$

$$y^2 = x^3 - x^4; \quad y^4 + xy^3 + x^2(ay-bx) = 0.$$

CAPITOLO XXIII.

COEFFICIENTI DIFFERENZIALI DI UN ARCO, DI UN'AREA, ETC.

+ 307. La lunghezza dell'arco di una curva APQ, contato da un punto fisso A al punto P, è evidentemente una funzione dell'ascissa x del punto P. Questa funzione spesso è molto difficile a determinarsi, ma il suo coefficiente differenziale rispetto ad x può sempre essere assegnato.



Siano P, Q, due punti di una curva;

x, y, le coordinate di P;

$x + \Delta x$, $y + \Delta y$, le coordinate di Q.

Si tirino le ordinate PM, QN, e la tangente in P che incontra QN in R ed Ox in T.

Sia $$AP = s, \qquad AQ = s + \Delta s.$$

Ammettiamo come assioma, che la lunghezza Δs è maggiore della corda PQ, e minore di $PR + RQ$.

La corda $PQ = \sqrt{\{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2\}}$,

$$PR = MN \sec PTM = MN \sqrt{(1 + \tan^2 PTM)}$$
$$= \Delta x \sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}},$$

$$QR = y + \Delta y - RN$$
$$= y + \Delta y - (PM + \Delta x \tan PTM)$$
$$= \quad \Delta y - \Delta x \frac{dy}{dx};$$

onde Δs giace tra $\sqrt{\{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2\}}$ e

$$\Delta x\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}+\Delta y-\Delta x\frac{dy}{dx};$$

quindi $\frac{\Delta s}{\Delta x}$ giace tra $\sqrt{\left\{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2\right\}}$ e

$$\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}+\frac{\Delta y}{\Delta x}-\frac{dy}{dx}.$$

Ora il limite di $\sqrt{\left\{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2\right\}}$, quando Δx diminuisce indefinitamente, è

$$\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}.$$

Il limite di $\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}+\frac{\Delta y}{\Delta x}-\frac{dy}{dx}$ è

$$\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}+\frac{dy}{dx}-\frac{dy}{dx}, \text{ o } \sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}.$$

Il limite di $\frac{\Delta s}{\Delta x}$ è, per definizione, $\frac{ds}{dx}$; quindi

$$\frac{ds}{dx}=\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}\dots\dots\dots\dots(1).$$

Si elevi a quadrato e si moltiplichi per $\left(\frac{dx}{ds}\right)^2$, allora

$$1=\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2\dots\dots\dots\dots(2).$$

Se x ed y sono entrambe funzioni di una terza variabile t, poichè

$$\frac{dx}{ds}=\frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{ds}{dt}}, \text{ e } \frac{dy}{ds}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{ds}{dt}},$$

abbiamo da (2), $\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\dots\dots\dots\dots(3).$

308. Degli assiomi sui quali è fondata la dimostrazione precedente, il primo probabilmente sarà concesso subito; il secondo è più difficile, e non sarà necessariamente vero se l'arco non è *concavo verso la corda PQ lungo la sua estensione.* Si deve intendere perciò, nello stabilirlo, che l'arco PQ deve essere preso così piccolo che sia sempre concavo verso la sua corda.

Vi è un altro modo di arrivare ai risultati dell'Art. 307, il quale è preferito da alcuni scrittori: essi asseriscono che non possiamo formarci un'idea precisa della *lunghezza di un'arco,* se non riguardandolo come il *limite del perimetro di un poligono iscritto in quell'arco, quando la lunghezza di ciascun lato del poligono diminuisce indefinitamente.* Se adottiamo questa definizione della lunghezza di un arco, dobbiamo mostrare che il limite menzionato esiste, ed è lo stesso in qualunque maniera si supponga il poligono iscritto, purchè ciascun lato diminuisca in fine indefinitamente.

Si tirino due corde che dividono l'intero arco che si considera in due porzioni; indi in ciascuna di queste suddivisioni si situino due corde che dividono l'intero arco in quattro porzioni; in ciascuna di queste ultime suddivisioni si situino due corde, e così di seguito. I perimetri dei poligoni così formati costituiscono una serie continuamente crescente; e come è facile vedere che essi non possono crescere senza limite, dimostriamo il primo punto, cioè, che vi è un *limite* al *perimetro del poligono inscritto quando la lunghezza di ciascun lato diminuisce indefinitamente.*

Supponiamo ora due poligoni con lati indefinitamente piccoli inscritti nella curva, uno di essi essendo uno della serie testè considerata, e l'altro descritto secondo un'altra legge. Si tirino le tangenti alla curva nei vertici di *tutti e due* i poligoni, formando così *un* poligono circoscritto all'arco. Allora è facile vedere che una corda di ciascun poligono serba alla corrispondente porzione della figura circoscritta, un rapporto che può rendersi tanto vicino all'unità quanto ci piace diminuendo sufficientemente la lunghezza di ciascuna corda. Quindi il perimetro di ciascuna figura inscritta serba a quello della figura circoscritta un rapporto che è ultimamente quello di eguaglianza, e per conseguenza il rapporto del perimetro di una figura inscritta a quello dell'altra figura inscritta è ultimamente quello di eguaglianza. Ciò dimostra il secondo punto contenuto nella definizione della

lunghezza di un arco, cioè, che il limite ottenuto è lo stesso secondo qualunque legge i poligoni siano inscritti.

Da questa definizione della lunghezza di un arco segue che l'ultimo rapporto della lunghezza di un arco indefinitamente piccolo alla sua corda è quello di eguaglianza, cioè,

$$\frac{\Delta s}{\sqrt{\{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2\}}} \text{ o } \frac{\frac{\Delta s}{\Delta x}}{\sqrt{\left\{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2\right\}}}=1, \text{ ultimamente,}$$

onde $$\frac{ds}{dx}=\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}.$$

309. Poichè secante $PTx=\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}$,

abbiamo $$\cos PTx=\frac{1}{\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}}=\frac{dx}{ds},$$

e $$\operatorname{sen} PTx=\cos PTx \tan PTx$$

$$=\frac{dx}{ds}\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{ds}.$$

310. Se x ed y sono espressi in termini di θ dalle equazioni

$$x=r\cos\theta, \quad y=r\operatorname{sen}\theta,$$

abbiamo $$\frac{ds}{d\theta}=\frac{ds}{dx}\frac{dx}{d\theta}$$

$$=\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}\frac{dx}{d\theta}$$

$$=\sqrt{\left\{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2\right\}}.$$

Ma $$\frac{dx}{d\theta}=\cos\theta\frac{dr}{d\theta}-r\operatorname{sen}\theta,$$

$$\frac{dy}{d\theta}=\operatorname{sen}\theta\frac{dr}{d\theta}+r\cos\theta;$$

onde $$\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{\left\{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2\right\}}.$$

Inoltre $$\frac{ds}{dr} = \frac{ds}{d\theta}\frac{d\theta}{dr} = \sqrt{\left\{1 + r^2\left(\frac{d\theta}{dr}\right)^2\right\}}.$$

Abbiamo dimostrato nell'Art. 279, che

$$\tan\varphi = r\frac{d\theta}{dr},$$

in cui φ è l'angolo tra il raggio vettore al punto di cui le coordinate polari sono r, θ, e la tangente in quel punto. Quindi

$$\operatorname{sen}\varphi = \frac{r\dfrac{d\theta}{dr}}{\sqrt{\left\{1 + r^2\left(\dfrac{d\theta}{dr}\right)^2\right\}}} = \frac{r\dfrac{d\theta}{dr}}{\dfrac{ds}{dr}} = r\frac{d\theta}{ds}.$$

Similmente $$\cos\varphi = \frac{dr}{ds}.$$

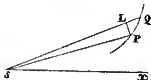
Questi risultati possono anche dedursi immediatamente dalla figura nell'Art. 279; infatti $\operatorname{sen}\varphi$ è il valore limite di $\frac{PL}{PQ}$, cioè, di $\frac{PL}{\Delta s}\cdot\frac{\Delta s}{PQ}$ o di $\frac{r\operatorname{sen}\Delta\theta}{\Delta s}\cdot\frac{\Delta s}{PQ}$. Il limite di $\frac{r\operatorname{sen}\Delta\theta}{\Delta s}$ è $\frac{rd\theta}{ds}$; ed il limite di $\frac{\Delta s}{PQ}$ è l'unità; quindi $\operatorname{sen}\varphi = \frac{rd\theta}{ds}$. Similmente può trovarsi il valore di $\cos\varphi$.

311. Il valore di $\frac{ds}{d\theta}$, nell'Art. 310, può anche ottenersi così:

Siano P, Q, punti di una curva, e si supponga

$SP = r$, $PSx = \theta$,

$SQ = r + \Delta r$, $QSx = \theta + \Delta\theta$.



Si tiri PL perpendicolare ad SQ, allora

$$PL = r\operatorname{sen}\Delta\theta,$$

$$LQ = r + \Delta r - r\cos\Delta\theta$$
$$= \quad \Delta r + 2r\,\text{sen}^2\frac{\Delta\theta}{2}.$$

Inoltre la corda $PQ = \sqrt{(PL^2 + LQ^2)}$.

Da ciò, se procediamo secondo il metodo degli articoli precedenti, arriveremo a

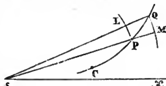
$$\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{\left\{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right\}}.$$

312. Se A dinota l'area contenuta tra una curva e l'asse delle x, abbiamo dimostrato, Art. 43,

$$\frac{dA}{dx} = y.$$

313. Trovare il coefficiente differenziale dell'area di una curva riferita a coordinate polari.

Dinoti A l'area contenuta tra il raggio SP, il raggio SC tirato ad un punto fisso C della curva, e la curva CP. Dinoti ΔA l'area PSQ. Col centro S e raggio SP si descriva un arco che incontra SQ in L, e col centro S e raggio SQ si descriva un arco che incontra SP prolungato in M. Allora ΔA giace tra PSL e QSM, cioè, tra



$$\frac{r^2\Delta\theta}{2} \quad \text{ed} \quad \frac{(r+\Delta r)^2}{2}\Delta\theta;$$

onde $\frac{\Delta A}{\Delta\theta}$ giace tra $\frac{r^2}{2}$ ed $\frac{(r+\Delta r)^2}{2}$.

Quindi, procedendo al limite, abbiamo

$$\frac{dA}{d\theta} = \frac{r^2}{2}.$$

314. *Coefficiente differenziale del volume di un solido di rotazione.*

Supponiamo che la curva APQ nella figura dell' Art. 307 giri intorno l'asse delle x, e così generi un solido. Dinoti

V il volume di una porzione di questo solido contenuta tra due piani perpendicolari all'asse Ox, l'uno condotto per un punto fisso A e l'altro per P. Dinoti ΔV il volume del solido contenuto tra i piani per P e Q perpendicolari all'asse. Il volume di un cilindro che ha MN per suo asse e per sua base l'area circolare descritta dalla rotazione di PM intorno all'asse Ox, è $\pi y^2 \Delta x$. Il volume di un cilindro che ha MN per suo asse e per sua base l'area circolare descritta dalla rotazione di QN intorno ad Ox, è $\pi (y + \Delta y)^2 \Delta x$. Quindi ΔV giace tra $\pi y^2 \Delta x$ e $\pi (y + \Delta y)^2 \Delta x$. Onde $\frac{\Delta V}{\Delta x}$ giace tra πy^2 e $\pi (y + \Delta y)^2$. Quindi, procedendo al limite, abbiamo

$$\frac{dV}{dx} = \pi y^2.$$

315. *Coefficiente differenziale della superficie di un solido di rotazione.*

Siano P, Q, due punti di una curva che girando intorno all'asse Ox genera un solido di rotazione. Sia A un punto fisso della curva, e supponiamo $AP = s$, $PQ = \Delta s$. Dinoti S l'area della superficie descritta dalla rotazione di AP, e ΔS l'area della superficie descritta dalla rotazione di PQ. Si tirino PR e QT ciascuna eguale a Δs e ciascuna parallela ad Ox. Se PR gira intorno ad Ox genera un cilindro, la superficie del quale è $2\pi y \Delta s$. Se QT gira intorno ad Ox genera un cilindro, la superficie del quale è $2\pi (y + \Delta y) \Delta s$. Ammettiamo come un assioma che la superficie generata dall'arco PQ giace tra la prima e la seconda. Quindi Δs giace tra $2\pi y \Delta s$ e $2\pi (y + \Delta y) \Delta s$, e procedendo al limite, abbiamo

$$\frac{dS}{ds} = 2\pi y;$$

onde

$$\frac{dS}{dx} = 2\pi y \frac{ds}{dx}.$$

ESEMPII.

1. Nell' ellisse $\frac{ds}{dx} = \sqrt{\left(\frac{a^2 - e^2x^2}{a^2 - x^2}\right)}$; e se $x = a \operatorname{sen} \varphi$,

$$\frac{ds}{d\varphi} = a \sqrt{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)}.$$

2. Nella parabola $y^2 = 4ax$, $\frac{ds}{dx} = \sqrt{\left(\frac{a+x}{x}\right)}$.

3. Nel circolo $\frac{ds}{dx} = \frac{a}{y}$.

4. Trovare il coefficiente differenziale dell'arco della curva $e^y(e^x - 1) = e^x + 1$.

Risultato. $\frac{ds}{dx} = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}$.

5. Nella curva $r = a^\theta$, $\frac{ds}{d\theta} = r \sqrt{\{1 + (\log a)^2\}}$.

6. Nella curva $r^2 = a^2 \cos 2\theta$, $\frac{ds}{d\theta} = \frac{a^2}{r}$.

7. Nella curva $r = a\theta$, $\frac{ds}{dr} = \frac{\sqrt{(a^2 + r^2)}}{a}$.

8. Se $e^{-y} = \cos x$, $\frac{dx}{ds} = \cos x$.

CAPITOLO XXIV.

CONTATTO. CURVATURA. EVOLUTE ED INVOLUTE.

316. Sia $y=\varphi(x)$ l'equazione di una curva, ed $y=\psi(x)$ l'equazione di un'altra; allora se $\varphi(a)=\psi(a)$ le curve *s'intersegano* nel punto di ascissa a. Se inoltre $\varphi'(a)=\psi'(a)$ le curve hanno una tangente comune nel punto comune; in questo caso si dice che esse hanno un contatto di *primo* ordine. Se inoltre $\varphi''(a)=\psi''(a)$ le curve si dice che hanno un contatto di *secondo* ordine. Se $\varphi(a)=\psi(a)$, $\varphi'(a)=\psi'(a)$, $\varphi''(a)=\psi''(a)$, $\varphi'''(a)=\psi'''(a)$, e così di seguito sino a $\varphi^n(a)=\psi^n(a)$, le curve si dice di avere un contatto di n^{mo} ordine nel punto comune. Quando parliamo di due curve che hanno contatto di n^{mo} ordine intendiamo che esse non abbiano contatto di un ordine superiore; cioè, con la precedente notazione intendiamo che $\varphi^{n+1}(a)$ *non* sia eguale a $\psi^{n+1}(a)$.

317. Se due curve hanno in un punto un contatto di n^{mo} ordine, allora nelle vicinanze del punto comune nessuna curva può passare tra esso a meno che abbia con ciascuna di esse un contatto di un ordine non inferiore all'n^{mo}. Infatti siano $y=\varphi(x)$ ed $y=\psi(x)$ le equazioni di due curve che hanno contatto di ordine n^{mo} nel punto $x=a$; e dinoti y_1 l'ordinata della prima curva corrispondente all'ascissa $a+h$, ed y_2 l'ordinata dell'altra curva corrispondente alla stessa ascissa; allora, per l'Art. 92,

$$y_1=\varphi(a)+h\varphi'(a)+\frac{h^2}{1\cdot 2}\varphi''(a)\ldots+\frac{h^n}{\underline{|n}}\varphi^n(a)+\frac{h^{n+1}}{\underline{|n+1}}\varphi^{n+1}(a+\theta h),$$

$$y_2=\psi(a)+h\psi'(a)+\frac{h^2}{1\cdot 2}\psi''(a)\ldots+\frac{h^n}{\underline{|n}}\psi^n(a)+\frac{h^{n+1}}{\underline{|n+1}}\psi^{n+1}(a+\theta h).$$

Quindi, poichè le curve hanno contatto di n^{mo} ordine,

$$y_1 - y_2 = \frac{h^{n+1}}{\lfloor n+1} \{ \varphi^{n+1}(a+\theta h) - \psi^{n+1}(a+\theta h) \}.$$

Si supponga ora essere $y=\chi(x)$ l'equazione di una terza curva che ha contatto di m^{mo} ordine con la prima curva nel punto $x=a$; allora se $y_3=\chi(a+h)$, abbiamo

$$y_1 - y_3 = \frac{h^{m+1}}{\lfloor m+1} \{ \varphi^{m+1}(a+\theta h) - \chi^{m+1}(a+\theta h) \}.$$

Se m è minore di n possiamo dare tale valore ad h da rendere $y_1 - y_2$ minore di $y_1 - y_3$ per quel valore di h e per tutt'i valori numericamente inferiori sì positivi che negativi. Quindi nelle vicinanze del punto comune la seconda curva è più vicina alla prima in paragone della terza.

Nelle espressioni precedenti θ dinota semplicemente una frazione propria, e non è necessariamente la *stessa* frazione propria nei differenti casi.

318. L'espressione dì $y_1 - y_2$ nell'Art. 317, quando h diminuisce sufficientemente, ha lo stesso segno di

$$h^{n+1} \{ \varphi^{n+1}(a) - \psi^{n+1}(a) \},$$

e quindi cambia segno con h se n è *pari;* onde se due curve hanno contatto di un ordine *pari* esse si attraversano scambievolmente nel punto comune. Se due curve hanno contatto di un ordine *dispari* esse non si attraversano scambievolmente nel punto comune.

319. Affinchè una curva possa avere contatto di n^{mo} ordine con una curva data, apparisce dall'Art. 316 che $n+1$ equazioni debbono essere soddisfatte. Quindi, se l'equazione di una specie di curve contiene $n+1$ costanti, possiamo, dando valori convenienti a queste costanti, trovare la curva particolare della specie che ha contatto di n^{mo} ordine con una curva data in un punto dato. Per esempio, l'equazione di una linea retta è della forma $y = mx + c$; poichè vi sono due costanti, m e c, possiamo, determinandole convenevolmente, trovare la linea retta che ha contatto di *primo* ordine

con una curva data in un punto dato. Se la curva data è $y = \varphi(x)$, ed il punto dato quello che ha per coordinate $x = a$, $y = \varphi(a)$, allora dobbiamo avere

$$ma + c = \varphi(a),$$

ed

$$m = \varphi'(a).$$

Ondo m e c sono determinate.

Se $y = \varphi(x)$ è l'equazione di una curva, allora

$$y = \varphi(a) + (x-a)\varphi'(a) + \frac{(x-a)^2}{1 \cdot 2}\varphi''(a) \ldots + \frac{(x-a)^n}{\lfloor n}\varphi^n(a)$$

è l'equazione di una curva cho ha un contatto di n^{mo} ordine con la curva data nel punto $x = a$. Questo si può verificare facilmente.

320. *Cerchio di curvatura.* L'equazione generalo di un cerchio racchiude tre costanti; quindi in un punto qualunque di una curva può trovarsi un cerchio che abbia contatto di *secondo* ordine con la curva in quel punto. Procediamo a determinare il raggio ed il centro di un tal circolo.

Def. Il cerchio di curvatura in un punto di una curva è un cerchio che ha in quel punto un contatto di secondo ordine con la curva.

Sia
$$(X-a)^2 + (Y-b)^2 = \rho^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

l'equazione di un cerchio, sicchè a, b, sono le coordinate del suo centro e ρ è il suo raggio. Da (1) differenziando abbiamo

$$\left.\begin{aligned} X - a + (Y-b)\frac{dY}{dX} = 0 \\ 1 + \left(\frac{dY}{dX}\right)^2 + (Y-b)\frac{d^2Y}{dX^2} = 0 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Se questo cerchio è il cerchio di curvatura nel punto (x, y) della curva data, dobbiamo avere

$$\left.\begin{aligned} X &= x \\ Y &= y \\ \frac{dY}{dX} &= \frac{dy}{dx} \\ \frac{d^2Y}{dX^2} &= \frac{d^2y}{dx^2} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Quindi, da (2),

$$\left.\begin{aligned} (x-a)+(y-b)\frac{dy}{dx}&=0 \\ 1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(y-b)\frac{d^2y}{dx^2}&=0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4).$$

Onde

$$\left.\begin{aligned} y-b&=-\frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}} \\ x-a&=\frac{\frac{dy}{dx}\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}{\frac{d^2y}{dx^2}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5).$$

Da (1) e (5) abbiamo

$$\rho=\frac{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

Quindi i valori di a, b, ρ, sono trovati, e così la posizione ed il raggio del cerchio di curvatura in un punto di una curva sono determinati.

Nel valore di ρ sarà conveniente in ogni esempio particolare di dare al radicale nel numeratore lo stesso segno che ha $\frac{d^2y}{dx^2}$, in modo da rendere ρ positivo. Quindi se y è positivo e la curva *concava* all'asse delle x dovremmo porre

$$\rho=-\frac{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

Dalla prima delle equazioni (4) vediamo che il punto (a, b) è sulla normale alla curva data nel punto (x, y).

Il centro del cerchio di curvatura in un punto si dice per brevità « il centro di curvatura. » Ancora il raggio del cerchio di curvatura si dice « il raggio di curvatura ».

Se una linea è tirata da un punto di uua curva in una direzione qualunque la porzione di questa linea intercetta dal cerchio di curvatura nel punto che si considera si chiama la *corda di curvatura* in quel puuto secondo la data direzione. Per la natura di un circolo la lunghezza della corda di curvatura si otterrà moltiplicando il diametro del cerchio di curvatura pel coseno dell'angolo tra la corda di curvatura e la normale comune alla curva ed al circolo nel punto che si considera.

321. Se p è la perpendicolare dall'origine sulla tangente nel punto (x, y) di una curva, abbiamo

$$p = \frac{x\frac{dy}{dx} - y}{\sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}},$$

onde
$$\frac{dp}{dx} = \frac{x\frac{d^2y}{dx^2}\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\} - \frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}\left(x\frac{dy}{dx} - y\right)}{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{\left(x + y\frac{dy}{dx}\right)\frac{d^2y}{dx^2}}{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}.$$

Inoltre, se
$$r^2 = x^2 + y^2,$$

$$r\frac{dr}{dx} = x + y\frac{dy}{dx}.$$

Dai valori di $\frac{dp}{dx}$ e $\frac{dr}{dx}$, ed il valore di ρ nell'Art. 320, vediamo che,

$$\frac{dp}{dx} = \frac{1}{\rho}r\frac{dr}{dx},$$

e
$$\rho = r\frac{dr}{dp}.$$

322. Se x ed y sono ciascuna una funzione di una terza variabile t, abbiamo

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}},\ \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dx}{dt}-\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dy}{dt}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}.$$

Adoperando questi valori, deduciamo

$$\rho=\frac{\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dx}{dt}-\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dy}{dt}}.$$

Per esempio, se $t=s$ l'arco della curva misurato da un punto fisso, allora

$$\rho=\frac{1}{\frac{d^2y}{ds^2}\frac{dx}{ds}-\frac{d^2x}{ds^2}\frac{dy}{ds}}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (1),$$

poichè per l'Art. 307 $\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2=1$ .... (2).

Quindi
$$\frac{1}{\rho}=\frac{d^2y}{ds^2}\frac{dx}{ds}-\frac{d^2x}{ds^2}\frac{dy}{ds}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (3).$$

Differenziando (2) otteniamo

$$0=\frac{dx}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}+\frac{dy}{ds}\frac{d^2y}{ds^2}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (4).$$

Si elevino a quadrato (3) e (4), e si addizionino; così

$$\frac{1}{\rho^2}=\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2.$$

Da (3), per mezzo di (4), possiamo anche dedurre

$$\frac{1}{\rho}=\frac{\frac{d^2y}{ds^2}}{\frac{dx}{ds}}=-\frac{\frac{d^2x}{ds^2}}{\frac{dy}{ds}}.$$

323. Se poniamo $x = r\cos\theta$ ed $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$, abbiamo dall' Art. 201 i valori di $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{d^2y}{dx^2}$. Si sostituiscano questi nell'espressione di ρ dell'Art. 320, e troviamo

$$\rho = \frac{\left\{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\theta^2}}.$$

Se $r = \frac{1}{u}$, allora $\frac{dr}{d\theta} = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\theta}$, e

$$\frac{d^2r}{d\theta^2} = \frac{2}{u^3}\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 - \frac{1}{u^2}\frac{d^2u}{d\theta^2}.$$

Si sostituiscano questi nel precedente valore di ρ; allora

$$\rho = \frac{\left\{u^2 + \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{u^3\left(u + \frac{d^2u}{d\theta^2}\right)}.$$

Questo risultato può essere anche trovato così. Per l'Art. 321

$$\rho = r\frac{dr}{dp} = -\frac{1}{u^3}\frac{du}{dp}.$$

Per l'Art. 284 $$\frac{1}{p^2} = u^2 + \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2,$$

onde $$-\frac{1}{p^3}\frac{dp}{d\theta} = \left(u + \frac{d^2u}{d\theta^2}\right)\frac{du}{d\theta},$$

e $$\frac{dp}{du} = -p^3\left(u + \frac{d^2u}{d\theta^2}\right).$$

Quindi $$\rho = \frac{1}{u^3p^3\left(u + \frac{d^2u}{d\theta^2}\right)}$$

$$= \frac{\left\{u^2 + \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{u^3\left(u + \frac{d^2u}{d\theta^2}\right)}$$

La corda di curvatura che passa per l'origine si otterrà moltiplicando 2ρ per il coseno dell'angolo tra il raggio vettore e la normale alla curva nel punto considerato. (Art. 320). Quindi la corda di curvatura per l'origine

$$= 2\rho \frac{p}{r} = 2p \frac{dr}{dp};$$

$$= \frac{2u^2 + 2\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2}{u^2\left(u + \frac{d^2u}{d\theta^2}\right)}.$$

324. Se ψ è l'angolo che la tangente in un punto di una curva fa con l'asse delle x, abbiamo

$$\psi = \tan^{-1}\frac{dy}{dx},$$

onde
$$\frac{d\psi}{ds} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\frac{dx}{ds} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}};$$

onde
$$\rho = \frac{ds}{d\psi}.$$

325. Se due curve polari hanno un punto comune le coordinate polari di questo punto debbono soddisfare le equazioni di tutte e due le curve. Se esse hanno un contatto di primo ordine in quel punto il valore di $\frac{dy}{dx}$ è lo stesso per tutte e due le curve in quel punto, e quindi, per l'Art. 201, il valore di $\frac{dr}{d\theta}$ è lo stesso per tutte e due le curve. Se le curve hanno contatto di second' ordine il valore di $\frac{d^2y}{dx^2}$ ancora è lo stesso per tutt' e due le curve nel punto comune, e quindi, per l'Art. 201, il valore di $\frac{d^2r}{d\theta^2}$ è lo stesso per tutte e due le curve in quel punto. Procedendo in questo modo, vediamo che se due curve hanno contatto di n^{mo} ordine in un punto, se esse sono riferite a coordinate polari, i valori di

$\frac{dr}{d\theta}$, $\frac{d^2r}{d\theta^2}$, $\ldots \frac{d^nr}{d\theta^n}$ saranno gli stessi per tutte e due le curve nel punto comune.

326. Poichè $$\frac{1}{p^2} = \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2,$$

segue dall'ultimo articolo, che se due curve hanno contatto di primo ordine il valore di p sarà lo stesso per tutte e due le curve nel punto comune. Inoltre, poichè

$$\frac{dp}{dr} \text{ o } \frac{\frac{dp}{d\theta}}{\frac{dr}{d\theta}} \text{ racchiude solamente } r,\ \frac{dr}{d\theta},\ \text{e } \frac{d^2r}{d\theta^2},$$

segue che se due curve hanno contatto di second'ordine il valore di $\frac{dp}{dr}$ deve anche essere lo stesso per le due curve nel punto comune.

327. Possiamo applicare l'articolo precedente a stabilire l'equazione dimostrata nell'Art. 321 come segue.

Se R è il raggio vettore di un punto di un circolo,

P la perpendicolare sulla tangente,

c il raggio del circolo,

b la distanza del centro dall'origine,

abbiamo, per le proprietà del circolo,

$$2cP = R^2 + c^2 - b^2.$$

Differenziando, $$c = R\frac{dR}{dP}.$$

Se questo circolo è il circolo di curvatura in un punto di una curva che ha r per suo raggio vettore e p per la perpendicolare sulla tangente, abbiamo per l'ultimo articolo,

$$R = r$$

$$P = p,$$

$$\frac{dR}{dP} = \frac{dr}{dp},$$

onde
$$c = r\frac{dr}{dp};$$

cioè, il raggio di curvatura $= r\dfrac{dr}{dp}$.

328. In un punto in cui il raggio di curvatura è un massimo o un minimo il circolo di curvatura ha contatto di *terzo* ordine con la curva.

Poichè
$$\rho = \frac{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

abbiamo, quando $\dfrac{d\rho}{dx} = 0$,
$$3\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 \frac{dy}{dx} - \frac{d^3y}{dx^3}\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\} = 0.$$

Se nell'Art. 320 differenziamo la seconda delle equazioni (2), abbiamo
$$3\frac{dY}{dX}\frac{d^2Y}{dX^2} + (Y - b)\frac{d^3Y}{dX^3} = 0.$$

Quindi
$$\frac{d^3Y}{dX^3} = -\frac{3\frac{dY}{dX}\frac{d^2Y}{dX^2}}{Y - b}$$
$$= \frac{3\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 \frac{dy}{dx}}{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

per le equazioni (3) di quell'articolo. Affinchè il circolo di curvatura possa avere contatto di *terzo* ordine con la curva nel punto proposto, dobbiamo avere
$$\frac{d^3Y}{dX^3} = \frac{d^3y}{dx^3},$$

onde
$$\frac{d^3y}{dx^3}\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\} = 3\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 \frac{dy}{dx}.$$

Questa è la relazione che abbiamo già mostrato di aver luogo nei punti in cui il raggio di curvatura è un massimo o un minimo.

329. Nella figura dell'Art. 284 sia $SP=r$ ed $SY=p$; se p' dinota la perpendicolare da S sulla tangente in Y alla locale di Y, allora sarà

$$p' = \frac{p^2}{r}.$$

Siano x, y, le coordinate di P,

x', y', le coordinate di Y;

allora
$$p' = \frac{x'\frac{dy'}{dx'} - y'}{\sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dy'}{dx'}\right)^2\right\}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

L'equazione della tangente in P è

$$\eta - y = \frac{dy}{dx}(\xi - x),$$

η e ξ essendo le coordinate variabili.

Poichè il punto Y è sulla tangente,

$$y' - y = \frac{dy}{dx}(x' - x) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

L'equazione di SY è $\quad \eta = \frac{y'}{x'}\xi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3).$

Ma SY è perpendicolare a PY, onde

$$\frac{y'}{x'} = -\frac{dx}{dy} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4).$$

Combinando (2) e (4),

$$(y' - y)\,y' = -x'(x' - x);$$

onde
$$yy' + xx' = y'^2 + x'^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5).$$

Si differenzii (5), così

$$y'\frac{dy}{dx} + y\frac{dy'}{dx} + x' + x\frac{dx'}{dx} = 2y'\frac{dy'}{dx} + 2x'\frac{dx'}{dx}.$$

Questo per (4) si riduce a

$$(2x'-x)\frac{dx'}{dx}+(2y'-y)\frac{dy'}{dx}=0,$$

onde

$$\frac{dy'}{dx'}=-\frac{2x'-x}{2y'-y}.$$

Si sostituisca in (1), ed otteniamo

$$p'=\frac{x'^2+y'^2}{\sqrt{(x^2+y^2)}}=\frac{p^2}{r}.$$

330. Def. L'*evoluta* di una curva piana è il luogo del centro di curvatura; una curva quando si considera rispetto alla sua evoluta si chiama un'*involuta*.

Se x', y', sono le coordinate del centro di curvatura nel punto (x, y) di una curva, abbiamo per l'Art. 320,

$$x-x'+(y-y')\frac{dy}{dx}=0 \;\ldots\ldots\ldots (1),$$

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(y-y')\frac{d^2y}{dx^2}=0 \ldots\ldots\ldots (2).$$

Per mezzo dell'equazione della curva y, $\frac{dy}{dx}$, e $\frac{d^2y}{dx^2}$ si possono esprimere in termini di x; quindi dalle equazioni precedenti, eliminando x, possiamo ottenere una relazione tra x' ed y' che è l'equazione dell'evoluta. Per le equazioni precedenti, x' ed y' si possono considerare funzioni di x; differenziando la prima, abbiamo

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(y-y')\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dx'}{dx}-\frac{dy'}{dx}\frac{dy}{dx}=0.$$

Per mezzo di (2) questa dà

$$\frac{dx'}{dx}+\frac{dy'}{dx}\frac{dy}{dx}=0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots (3),$$

onde

$$1+\frac{dy'}{dx'}\frac{dy}{dx}=0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots (4).$$

Quindi (1) si può scrivere

$$y - y' = \frac{dy'}{dx'}(x - x'),$$

il che mostra che il punto (x, y) è situato sulla *tangente* all'*evoluta* nel punto (x', y'). Inoltre (1) mostra che il punto (x', y') è sulla *normale* alla *curva* nel punto (x, y). Quindi la normale in un punto di un'involuta è tangente nel corrispondente punto dell'evoluta.

331. Se ρ è la lunghezza del raggio di curvatura nel punto (x, y) di una curva, ed x', y', sono le coordinate del centro di curvatura, abbiamo

$$\rho^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2.$$

Come x' ed y' sono funzioni di x, tale anche è ρ; quindi differenziando abbiamo

$$(x - x')\left(1 - \frac{dx'}{dx}\right) + (y - y')\left(\frac{dy}{dx} - \frac{dy'}{dx}\right) = \rho\frac{d\rho}{dx}.$$

Per mezzo dell'equazione (1) dell'articolo precedente ciò dà

$$(x - x')\frac{dx'}{dx} + (y - y')\frac{dy'}{dx} = -\rho\frac{d\rho}{dx} \ldots\ldots (1).$$

Dalle equazioni (1) e (3) dell'articolo precedente otteniamo

$$\frac{\frac{dx'}{dx}}{x' - x} = \frac{\frac{dy'}{dx}}{y' - y} = \pm\left\{\frac{\left(\frac{dx'}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dy'}{dx}\right)^2}{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}\right\}^{\frac{1}{2}} = \pm\frac{1}{\rho}\frac{ds'}{dx},$$

s' essendo la lunghezza dell' arco dell' evoluta. Si vegga l'Art. 307. Quindi, per (1),

$$\frac{1}{\rho}\{(x' - x)^2 + (y' - y)^2\}\frac{ds'}{dx} = \pm\rho\frac{d\rho}{dx},$$

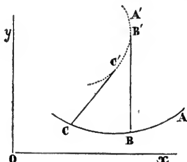
onde

$$\frac{ds'}{dx} = \pm\frac{d\rho}{dx} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Poichè $\frac{d(s' \mp \rho)}{dx} = 0$, abbiamo, per l'Art. 102,

$s' \mp \rho =$ ad una costante, poniamo l.

Sia ABC la curva data, e $A'B'C'$ l'evoluta, BB' essendo



il raggio di curvatura della curva data in B, e CC' in C. Allora se A' è il punto fisso dell'evoluta dal quale si misura l'arco, abbiamo

$$A'B' + B'B = l,$$

$$A'B'C' + C'C = l,$$

onde

$$B'C' = BB' - CC'.$$

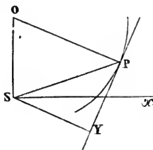
Quindi, se un filo flessibile di lunghezza l è fisso in A' e posto in contatto con l'evoluta $A'B'C'$, allora, a misura che il filo si svolge dall'*evoluta*, l'estremità libera di esso descriverà l'*involuta* CBA. Per questa proprietà si sono adoperati i nomi di evoluta e di involuta.

Nella figura al crescere di s' diminuisce ρ ed abbiamo $s' + \rho =$ ad una costante; se s' è misurato nella direzione da C' verso A', allora s' e ρ crescono insieme ed abbiamo $s' - \rho =$ ad una costante.

Si osserverà che una curva ha solamente *una* evoluta; ma una curva ha un numero infinito di involute, poichè nell'equazione $s' \mp \rho =$ costante, la costante può avere quel valore che ci piace.

332. Le seguenti formole polari per determinare l'evoluta di una curva sono alle volte utili.

Sia O il centro di curvatura corrispondente al punto P di una curva riferita a coordinate polari. Sia SY la perpendicolare sulla tangente in P.



Sia $SP = r$, $PO = \rho$, $SY = p$,

$SO = r'$, p' = alla perpendicolare da S sopra PO.

Dal triangolo SOP abbiamo

$$r'^2 = \rho^2 + r^2 - 2r\rho \cos SPO$$
$$= \rho^2 + r^2 - 2r\rho \,\text{sen}\, SPY$$
$$= \rho^2 + r^2 - 2\rho p \ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Inoltre $$p'^2 = r^2 - p^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

$$\rho = r\frac{dr}{dp} \ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Dall'equazione data della curva possiamo trovare p in termini di r, e quindi tra (1) e (2) possiamo eliminare r, e così abbiamo un'equazione tra p' ed r' per determinare il luogo di O. Poichè PO è tangente alla locale di O, p' è la perpendicolare dall'origine sulla tangente all'evoluta in O.

Nella figura la curva è tracciata *concava* al polo.

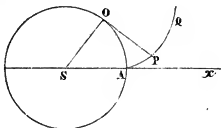
Se la curva è *convessa* al polo $\frac{dr}{dp}$ è negativo (Art. 294), e dovremmo prendere $\rho = -r\frac{dr}{dp}$; in questo caso troveremo invece di (1) l'equazione

$$r'^2 = \rho^2 + r^2 + 2\rho p.$$

Così in entrambi i casi abbiamo

$$r'^2 = \rho^2 + r^2 - 2pr\frac{dr}{dp}.$$

333. *Involuta di un circolo.*



Sia S il centro di un circolo, APQ una porzione dell'involuta, $OP = OA$ la porzione del filo svolto. Sia $SO = a$, $OSA = \varphi$, e siano x, y, le coordinate di P, l'origine essendo in S, ed SA la direzione dell'asse delle x. Allora

$$OP = a\varphi,$$

$$x = a\cos\varphi + a\varphi \operatorname{sen}\varphi,$$

$$y = a\operatorname{sen}\varphi - a\varphi\cos\varphi.$$

Sia $AP = s$, allora

$$\frac{ds}{d\varphi} = \sqrt{\left\{\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2\right\}}, \text{ Art. 307,}$$

$$= a\varphi.$$

Quindi, come vedremo nel Calcolo Integrale,

$$s = \frac{a\varphi^2}{2}.$$

ESEMPII.

1. Nella curva

$$y = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}\right),$$

l'ordinata in un punto è media proporzionale tra il raggio di curvatura ivi e nel punto più basso.

2. Nella curva

$$y = x^4 - 4x^3 - 18x^2,$$

il raggio di curvatura nell' origine $= \frac{1}{36}$.

3. Nella curva

$$y = x^3 + 5x^2 + 6x,$$

il raggio di curvatura nell' origine $= 22 \cdot 506$. In quale punto il raggio di curvatura è infinito?

4. Se $\varphi(x, y) = 0$ è l'equazione di una curva, allora

$$\rho = \frac{\left\{\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 \frac{d^2\varphi}{dx^2} - 2\frac{d\varphi}{dx}\frac{d\varphi}{dy}\frac{d^2\varphi}{dx\,dy} + \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 \frac{d^2\varphi}{dy^2}}.$$

5. Trovare la parabola con l'asse parallelo a quello delle y che ha il contatto più intimo con la curva $y = \frac{x^3}{a^2}$ nel punto in cui $x = a$.

Risultato. $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a}{3}\left(y - \frac{a}{4}\right)$.

6. Se $r = a\,(1 - \cos\theta)$, $\rho = \frac{4a}{3} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}$.

7. Se $r = a\,(2\cos\theta - 1)$, $\rho = \frac{a\,(5 - 4\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}{9 - 6\cos\theta}$.

8. Se le curve $f(x, y) = 0$ e $\varphi(x, y) = 0$ si toccano, mostrare che nel punto di contatto

$$\frac{df}{dx}\frac{d\varphi}{dy} - \frac{df}{dy}\frac{d\varphi}{dx} = 0.$$

9. Applicare l'ultimo risultato a trovare se la linea retta

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0$$

tocca la curva

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} - (a^2 + b^2)^{\frac{4}{3}} = 0.$$

10. Quando l'angolo tra il raggio vettore e la perpendicolare sulla tangente ha un valore massimo o minimo, mostrare che $p\rho = r^2$.

11. Se in ogni punto di una curva

$$2a\frac{dx}{ds} = \frac{b^2}{y} + y, \qquad \text{allora } \rho = \frac{2ay^2}{y^2 - b^2}.$$

Mostrare inoltre che $\frac{1}{n} + \frac{1}{\rho} = \frac{1}{a}$,

in cui n è la porzione della normale intercetta dall'asse delle x.

12. Trovare il valore di ρ quando $r = a\cos\theta$.

13. Se $x = \sqrt{(c^2 + s^2)}$, trovare ρ.

14. Le equazioni che determinano le coordinate a, b, del centro di curvatura di una curva si possono porre sotto la forma

$$2a\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{d^2r^2}{dy^2}, \qquad 2b\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2r^2}{dx^2},$$

in cui $\qquad r^2 = x^2 + y^2$.

15. Nella parabola $y^2 = 4mx$,

$$a = 2m + 3x,\ b = -\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{m}},\ \rho = \frac{2(m + x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{m}}.$$

Mostrare che il circolo di curvatura in ogni punto di una parabola, eccetto il vertice, sega l'asse in due punti in parti opposte del vertice.

16. Se $\qquad Ax^2 + By^2 + C = 0$,

$$a = \frac{A(A - B)}{BC}x^3, \quad b = \frac{B(B - A)}{AC}y^3.$$

17. Se $\frac{dy}{dx} = \frac{a}{s}$, allora $\rho = \frac{a^2 + s^2}{a}$.

18. Il raggio di curvatura della curva

$$y^2 = \frac{ax(x - 3a)}{x - 4a},$$

in uno dei punti in cui $y = 0$ è $\frac{3a}{8}$, e nell'altro $\frac{3a}{2}$.

19. Se $s = a \operatorname{sen}^n \psi$, trovare ρ. Si vegga l'Art. 324.

20. Trovare l'equazione del cerchio di curvatura della curva $y^4 = 4a^2x^2 - x^4$, nell'origine.

21. Se $y + ae^{-\frac{x}{a}} = 0$, allora $\rho = \dfrac{(a^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}{ay}$.

22. Mostrare che il circolo

$$\left(x - \frac{3a}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{3a}{4}\right)^2 = \frac{a^2}{2}$$

e la curva $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$

hanno contatto di *terzo* ordine nel punto $x = y = \dfrac{a}{4}$.

23. Se $r = a \sec^2 \dfrac{\theta}{2}$, trovare ρ. *Risultato.* $\rho = 2a \sec^3 \dfrac{\theta}{2}$.

24. Trovare le due parabole che, avendo i loro assi paralleli agli assi delle coordinate rispettivamente, hanno un contatto di secondo ordine col circolo $x^2+y^2=5a^2$, nel punto $x=a$, $y=2a$.

Risult. $\left(y - \dfrac{8a}{5}\right)^2 = \dfrac{2a}{5}\left(\dfrac{7a}{5} - x\right)$, $\left(x - \dfrac{a}{5}\right)^2 = \dfrac{16a}{5}\left(\dfrac{11a}{5} - y\right)$.

25. Nella curva $\dfrac{y}{c} = \dfrac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}\right)$, mostrare che le coordinate del centro di curvatura sono

$$Y = 2y,\ X = x - y\sqrt{\left(\frac{y^2}{c^2} - 1\right)},$$

e trovare l'equazione dell'evoluta.

26. Trovare l'equazione dell'evoluta dell'ellisse, e la lunghezza totale dell'evoluta.

Risultati. $(ax)^{\frac{2}{3}} + (by)^{\frac{2}{3}} = (a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}}$; $4\left(\dfrac{a^2}{b} - \dfrac{b^2}{a}\right)$.

27. Se $r = f(p)$ è l'equazione polare di una curva, mostrare che l'equazione del luogo del piede della perpendicolare condotta dal polo sulla tangente è $p' = \frac{r'^2}{f(r')}$. Trovare il luogo quando $p^2 = \frac{b^2 r}{2a - r}$, e mostrare che esso è un circolo.

28. Trovare l'evoluta della curva $p^2 = r^2 - a^2$.

29. Se A è l'area tra una curva, il suo raggio di curvatura, e la sua evoluta, allora

$$\frac{dA}{dx} = \frac{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^2}{2\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

30. Se ρ è il raggio di curvatura di una curva, allora il raggio di curvatura dell'evoluta nel punto corrispondente è $\rho \frac{d\rho}{ds}$.

31. Se x', y', sono le coordinate del centro di curvatura della curva $y^3 = a^2 x$; mostrare che

$$x' = \frac{a^4 + 15y^4}{6ya^2}, \quad y' = \frac{a^4 y - 9y^5}{2a^4},$$

e trovare l'equazione dell'evoluta.

32. Mostrare che in una parabola il raggio di curvatura in un punto è eguale a due volte la porzione della normale intercetta tra il punto e la direttrice.

33. Dimostrare le espressioni seguenti del raggio di curvatura in un punto di un'ellisse:

$$(1) \quad \frac{(rr')^{\frac{3}{2}}}{ab}, \qquad (2) \quad \frac{b^2}{a(1 - e^2 \operatorname{sen}^2\varphi)^{\frac{3}{2}}},$$

in cui r ed r' sono le distanze focali del punto e φ è l'angolo che la normale nel punto fa con l'asse maggiore.

34. Il luogo dei centri di tutte le ellissi per le quali sono date le direzioni dei loro assi, e che hanno un contatto di secondo ordine con una curva data in un punto dato, è un'iperbole rettangolare che passa per quel punto.

35. Trovare gli asintoti dell'evoluta della curva $y = a \tan x$.

36. Mostrarc che corrispondente alla porzione della curva $a^3y^2 = x^5$ vicina all'origine, l'evoluta è prossimamente una curva di cui l'cquazione è della forma $xy^2 = c^3$.

37. Mostrare che corrispondente alla porzione della curva $a^{\frac{3}{2}}y = a^{\frac{1}{2}}x^2 + x^{\frac{5}{2}}$ vicina all'originc, l'evoluta è approssimativamente una curva di cui l'equazione è

$$(y - \alpha)^3 + \beta^2 x = 0.$$

38. Mostrare che la corda di curvatura parallela all'asse delle x della curva $\sec \frac{y}{a} = e^{\frac{x}{a}}$ è costante; c che

$$\sec \left(\frac{3y}{a}\right)^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{x-a}{a}}$$

prossimamcnte rappresenta l'cvoluta di questa curva per la parte vicina all'origine.

39. Se lungo una curva ed il suo circolo di curvatura in un punto si misurano archi eguali (δs) dal punto di contatto e dalla stessa parte di esso, mostrare che la distanza fra le loro estremità sarà in fine $\frac{1}{6}\frac{d\rho}{ds}\frac{(\delta s)^3}{\rho^2}$.

40. Dimostrare che in generale si può trovare una sezione conica che ha un contatto di *quarto* ordine con una curva data in un punto proposto, e mostrare come trovarla quando la lunghezza della curva è data in termini dell'angolo che la normale fa con una linea fissa.

Se la curva è una spirale equiangola, ed α è l'angolo tra il raggio vettore e la tangente in un punto, mostrare che la sezione conica è un'ellisse, l'asse maggiore della quale fa con la normale alla curva un angolo ω dato dell'cquazione

$$\tan 2\omega + 3 \tan \alpha = 0.$$

CAPITOLO XXV.

INVILUPPI.

334. Si supponga

$$F(x, y, a) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

essere l'equazione di una curva, essendo a una quantità costante. Cambiando a in $a+h$, abbiamo un'altra curva della stessa specie di (1), l'equazione della quale è

$$F(x, y, a+h) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Il punto d'intersezione di (1) e (2) si troverà combinando le equazioni. Ora (2) si può scrivere

$$F(x, y, a) + h\, F'(x, y, a+\theta h) = 0 \ldots\ldots (3),$$

l'accento dinotando che $F(x, y, a)$ deve essere differenziata rispetto ad a, e nel risultato mutarsi a in $a+\theta h$. Quindi, combinando (3) ed (1), abbiamo il punto d'intersezione determinato da

$$F(x, y, a) = 0, \text{ ed } F'(x, y, a+\theta h) = 0 \ldots\ldots (4).$$

Se h diminuisce indefinitamente, le equazioni (4) diventano

$$F(x, y, a) = 0, \text{ ed } F'(x, y, a) = 0 \ldots\ldots\ldots (5).$$

Il punto determinato dalle equazioni (5) è il *limite della intersezione di* (1) *e* (2).

Se tra le equazioni (5) si elimina a, otteniamo l'equazione di una curva che si chiama il *luogo delle intersezioni finali delle curve formate variando continuamente* a *nell'equazione* $F(x, y, a) = 0$.

La quantità a si chiama il parametro della curva.

335. Il luogo delle intersezioni finali di una serie di curve *tocca* ciascuna della serie delle curve che s' intersegano.

Sia $F(x, y, a) = 0$ l'equazione che dà la serie delle curve variando continuamente la quantità a. Allora il luogo delle intersezioni finali si trova eliminando a tra

$$F(x, y, a) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1),$$

ed

$$F'(x, y, a) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Supponiamo che da (2) si ottenga a in termini di x ed y, supponiamo $a = \varphi(x, y)$; allora se sostituiamo in (1) abbiamo

$$F\{x, y, \varphi(x, y)\} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (3),$$

che è perciò l'equazione del luogo delle intersezioni finali. Ora se per un valore assegnato di a l'equazioni (1) e (2) danno valori possibili di x ed y, allora la curva rappresentata da (1) quando a ha questo assegnato valore, incontrerà la curva rappresentata da (3).

Il valore di $\frac{dy}{dx}$ per la curva (1) si trova dall'equazione

$$\frac{dF(x, y, a)}{dx} + \frac{dF(x, y, a)}{dy}\frac{dy}{dx} = 0 \ldots\ldots\ldots (4).$$

Il valore di $\frac{dy}{dx}$ per la curva (3) si trova da

$$\frac{dF(x, y, \varphi)}{dx} + \frac{dF(x, y, \varphi)}{dy}\frac{dy}{dx}$$
$$+ \frac{dF(x, y, \varphi)}{d\varphi}\left\{\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dy}\frac{dy}{dx}\right\} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (5).$$

Ma $\frac{dF}{d\varphi}$ differisce solamente da $\frac{dF}{da}$ nell'avere $\varphi(x, y)$ in luogo di a; quindi per (2) abbiamo *nel punto in cui* (1) e (3) *s' intersegano*, $\frac{dF}{d\varphi} = 0$. Così (5) diviene in quel punto

$$\frac{dF(x, y, \varphi)}{dx} + \frac{dF(x, y, \varphi)}{dy}\frac{dy}{dx} = 0 \ldots\ldots\ldots (6).$$

Poichè nel punto d'intersezione di (1) e (3) abbiamo $a = \varphi(x, y)$, l'equazione (6) dà per $\frac{dy}{dx}$ in quel punto lo stesso valore come

l'equazione (4). Quindi (1) e (3) si *toccano* nel loro punto comune.

Per questa proprietà il luogo delle intersezioni finali di una serie di curve si chiama l'*inviluppo* della serie di curve.

336. Es. Trovare il luogo delle intersezioni finali di una serie di parabole trovate variando a nell'equazione

$$y = ax - \frac{1 + a^2}{2p} x^2.$$

Quì $$F(x, y, a) = y - ax + \frac{1 + a^2}{2p} x^2 = 0 \ldots\ldots\ldots (1),$$

$$F'(x, y, a) = \frac{ax^2}{p} - x = 0 \ldots\ldots\ldots (2).$$

Da (2) $$a = \frac{p}{x}.$$

Si sostituisca in (1) ed abbiamo

$$y - p + \frac{p^2 + x^2}{2p} = 0,$$

o $$x^2 + 2py - p^2 = 0,$$

che è l'equazione di una parabola.

337. Si cerca il luogo delle intersezioni finali di una serie di normali condotte nei differenti punti di una curva data.

Siano x, y, le coordinate di un punto della curva data, allora

$$x' - x + (y' - y)\frac{dy}{dx} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

è l'equazione della normale in quel punto; x', y', essendo le coordinate variabili. Dall'equazione della curva data y e $\frac{dy}{dx}$ si possono esprimere come funzioni di x; così x è il *parametro* in (1), variando il quale si ottiene la serie delle normali. Quindi il luogo richiesto deve trovarsi eliminando x

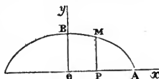
tra (1) e l'equazione ottenuta da (1) differenziandola rispetto ad x, che è

$$-1+(y'-y)\frac{d^2y}{dx^2}-\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0 \ldots\ldots\ldots (2).$$

Apparisce da (1) e (2), paragonate con l'Art. 320, che x', y', saranno le coordinate del centro di curvatura nel punto (x, y) della curva data. *Quindi il luogo delle intersezioni finali delle normali di una curva è l'evoluta di quella curva.*

338. Può accadere che l'inviluppo non tocca *tutte* le curve della serie, come apparirà da un esempio.

Si supponga il centro di un circolo di raggio variabile muoversi lungo l'asse dello x, sicchè l'ascissa OP del suo centro ed il suo raggio PM siano l'ascissa e l'ordinata di un'ellisse AMB che ha per sua equazione



$$\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}=1\,;$$

si cerca l'inviluppo del sistema di circoli.

Se $OP=a$, l'equazione del circolo sarà

$$(x-a)^2+y^2-\frac{n^2}{m^2}(m^2-a^2)=0 \ldots\ldots\ldots (1).$$

Quindi differenziando rispetto ad a, abbiamo

$$x-a-\frac{n^2a}{m^2}=0\,;$$

onde
$$a=\frac{m^2x}{m^2+n^2}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Si sostituisca in (1) ed otteniamo

$$\frac{x^2}{m^2+n^2}+\frac{y^2}{n^2}=1\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3),$$

che è l'equazione dell'inviluppo.

Per tutt'i valori di a compresi tra $\frac{m^2}{\sqrt{(m^2+n^2)}}$ ed m, i circoli non s'intersegano ultimamente, e *non* sono toccati dall'inviluppo: infatti il valore di y trovato da (2) e (3) è

$$y = \pm n \sqrt{\left\{1 - \frac{(m^2+n^2)\,a^2}{m^4}\right\}},$$

che è impossibile quando a è maggiore di $\frac{m^2}{\sqrt{(m^2+n^2)}}$.

Perciò nell'enunciato dell'Art. 335 non asseriamo che l'inviluppo tocchi ciascuna delle serie delle curve, ma che esso tocchi ciascuna delle serie delle curve che *s'intersegano*. La dimostrazione in questo articolo suppone che le equazioni (1) e (2) conduceano a valori *possibili* di x ed y; o in altri termini, che una curva della serie interseghi ultimamente la curva adiacente.

339. Il metodo dell'Art. 334 può essere esteso al caso nel quale vi sono n parametri legati da $n-1$ equazioni. Per esempio, si supponga

$$F(x, y, a, b, c) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

essere l'equazione di una curva, i parametri a, b, c, essendo legati dalle equazioni

$$\left.\begin{array}{l}\varphi_1(a, b, c) = 0\\ \varphi_2(a, b, c) = 0\end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2),$$

e che si cerchi il luogo delle intersezioni ultime delle curve ottenute dando ai parametri in (1) tutt'i valori possibili di accordo con (2). Se dalle equazioni (2) troviamo i valori di b e c in termini di a e li sostituiamo in (1), possiamo allora procedere come nell'Art. 334. Però se la risoluzione delle equazioni (2) è difficile possiamo procedere così. Riguardando b e c in (1) come funzioni implicite di a, abbiamo, se si differenzia rispetto ad a, e si pone il risultato eguale a zero come nell'Art. 334,

$$\frac{dF}{da} + \frac{dF}{db}\frac{db}{da} + \frac{dF}{dc}\frac{dc}{da} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Per trovare $\frac{db}{da}$ e $\frac{dc}{da}$, abbiamo differenziando (2),

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\varphi_1}{da}+\frac{d\varphi_1}{db}\frac{db}{da}+\frac{d\varphi_1}{dc}\frac{dc}{da}=0\\ \frac{d\varphi_2}{da}+\frac{d\varphi_2}{db}\frac{db}{da}+\frac{d\varphi_2}{dc}\frac{dc}{da}=0\end{aligned}\right\}\dots\dots\dots(4).$$

Se i valori di $\frac{db}{da}$ e $\frac{dc}{da}$ da (4) si sostituiscono in (3), e quindi si eliminano a, b, c, tra (1), (2), e (3), l'equazione risultante tra x ed y sarà il luogo richiesto.

Questo procedimento si può rendere più simmetrico supponendo a, b, c, tutte funzioni di una terza variabile, supponiamo t; allora adoperando Da, Db, Dc per $\frac{da}{dt}, \frac{db}{dt}, \frac{dc}{dt}$ rispettivamente, abbiamo invece di (3) e (4) le equazioni

$$\left.\begin{aligned}\frac{dF}{da}Da+\frac{dF}{db}Db+\frac{dF}{dc}Dc=0\\ \frac{d\varphi_1}{da}Da+\frac{d\varphi_1}{db}Db+\frac{d\varphi_1}{dc}Dc=0\\ \frac{d\varphi_2}{da}Da+\frac{d\varphi_2}{db}Db+\frac{d\varphi_2}{dc}Dc=0\end{aligned}\right\}\dots\dots\dots(5).$$

E la soluzione del problema sarà facilitata con l'uso dei moltiplicatori indeterminati. Così si moltiplichi la seconda delle equazioni (5) per λ, la terza per μ, e si aggiungano alla prima; ciò dà

$$\left(\frac{dF}{da}+\lambda\frac{d\varphi_1}{da}+\mu\frac{d\varphi_2}{da}\right)Da+\left(\frac{dF}{db}+\lambda\frac{d\varphi_1}{db}+\mu\frac{d\varphi_2}{db}\right)Db$$
$$+\left(\frac{dF}{dc}+\lambda\frac{d\varphi_1}{dc}+\mu\frac{d\varphi_2}{dc}\right)Dc=0.\dots\dots(6).$$

Ora poichè λ e μ sono attualmente indeterminate, possiamo prenderle in modo che

$$\left.\begin{aligned}\frac{dF}{da}+\lambda\frac{d\varphi_1}{da}+\mu\frac{d\varphi_2}{da}=0\\ \frac{dF}{db}+\lambda\frac{d\varphi_1}{db}+\mu\frac{d\varphi_2}{db}=0\end{aligned}\right\}\dots\dots\dots(7),$$

dalle quali segue per (6) che

$$\frac{dF}{dc} + \lambda \frac{d\varphi_1}{dc} + \mu \frac{d\varphi_2}{dc} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (8).$$

Quindi dobbiamo eliminare a, b, c, λ e μ dalle equazioni (1), (2), (7) ed (8); il risultato è l'equazione dell'inviluppo richiesto.

Esempio. Una linea si muove in modo che la lunghezza intercetta tra gli assi delle coordinate è costante; si cerca l'inviluppo della retta mobile.

Sia l'equazione della retta

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9),$$

sicchè $a^2 + b^2 =$ ad una costante $= k^2$, supponiamo... (10).

Da (9) $$\frac{x}{a^2} Da + \frac{y}{b^2} Db = 0,$$

da (10) $$aDa + bDb = 0;$$

così $$\left(\frac{x}{a^2} + \lambda a\right) Da + \left(\frac{y}{b^2} + \lambda b\right) Db = 0,$$

onde $$\frac{x}{a^2} + \lambda a = 0, \text{ ed } \frac{y}{b^2} + \lambda b = 0 \ldots\ldots\ldots (11);$$

si moltiplichi la prima di queste equazioni per a e la seconda per b e si aggiungano; così

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \lambda (a^2 + b^2) = 0,$$

cioè, $$1 + \lambda k^2 = 0, \text{ onde } \lambda = -\frac{1}{k^2}.$$

Quindi da (11)

$$a^3 = k^2 x, \text{ e } b^3 = k^2 y.$$

Onde da (9)

$$\frac{x}{\sqrt[3]{(k^2 x)}} + \frac{y}{\sqrt[3]{(k^2 y)}} = 1,$$

o $$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = k^{\frac{2}{3}}.$$

Questa equazione determina l'inviluppo.

ESEMPII.

1. Trovare l'inviluppo della serie di linee

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1,$$

in cui $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{k}$ una costante.

Risultato. $x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}=k^{\frac{1}{3}}$.

2. Siano descritte ellissi col centro e gli assi coincidenti, e che hanno la somma dei semiassi $=c$. Il luogo delle intersezioni ultime è

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=c^{\frac{2}{3}}.$$

3. Trovare l'inviluppo di tutte le ellissi che hanno un'area costante, gli assi essendo coincidenti.

Risultato. $4x^2y^2=c^4$ in cui πc^2 è l'area data.

4. Una linea retta taglia dagli assi coordinati distanze AB, AC, tali che

$$nAB+AC=c,$$

dimostrare che l'inviluppo delle linee è

$$(y+nx-c)^2=4nxy.$$

5. Trovare l'evoluta di una parabola $y^2=4ax$, prendendo l'equazione della normale nella forma

$y=m(x-2a)-am^3$. Si vegga l'Art. 337.

Risultato. $27ay^2=4(x-2a)^3$.

6. Trovare l'evoluta della curva $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$. (Si vegga l'Esempio 9, nel Capitolo XVIII).

Risultato. $(x+y)^{\frac{2}{3}}+(x-y)^{\frac{2}{3}}=2a^{\frac{2}{3}}$.

7. Mostrare che l'inviluppo della serie di parabole

$$\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)}+\sqrt{\left(\frac{y}{b}\right)}=1,$$

sotto la condizione $ab=c^2$, è un'iperbole che ha i suoi asintoti coincidenti con gli assi.

8. Trovare il luogo delle intersezioni ultime delle perpendicolari condotte alle normali della parabola $y^2=4ax$, nei punti in cui esse tagliano l'asse.

Risultato. $y^2=4a(2a-x)$.

9. Le linee rette condotte ad angoli retti sulle tangenti di una parabola nei punti in cui esse incontrano una data linea retta perpendicolare all'asse, sono in generale tangenti ad una parabola confocale.

10. Trovare l'inviluppo delle curve

$$\left(\frac{x-a}{h}\right)^2+\left(\frac{y-b}{k}\right)^2=1,$$

i parametri variabili a, b, essendo legati dall'equazione $\left(\frac{a}{h}\right)^2+\left(\frac{b}{k}\right)^2=1$.

Risultato. $\frac{x^2}{h^2}+\frac{y^2}{k^2}=4$.

11. Siano descritti dei circoli sulle successive doppie ordinate di una parabola come diametri; mostrare che il loro inviluppo è un'eguale parabola. Quale parte di questo sistema di circoli non ammette inviluppo?

12. Un circolo si muove col suo centro su di una parabola che ha per equazione $y^2-4ax=0$, e passa sempre pel vertice della parabola; mostrare che esso tocca sempre la curva $y^2(x+2a)+x^3=0$.

13. Una serie di parabole di lato retto l è descritta con i loro vertici in una data parabola di lato retto l'. Mostrare che il luogo delle intersezioni ultime è una parabola col lato retto $l+l'$, le concavità essendo nella stessa direzione e gli assi paralleli.

14. Trovare l'inviluppo di tutte le ellissi che hanno lo stesso centro e nelle quali la linea che congiunge le estremità degli assi è di lunghezza costante.

Risultato. $x\pm y=\pm c$.

15. Da un punto qualunque dell'ellisse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

si conducano le perpendicolari sugli assi, e si congiungano i piedi di queste perpendicolari; mostrare che la linea retta così ottenuta tocca sempre la curva

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}=1.$$

16. Da ogni punto dell'ellisse

$$\frac{x^2}{h^2}+\frac{y^2}{k^2}-1=0$$

siano tirate le coppie di tangenti all'ellisse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0;$$

il luogo delle intersezioni ultime delle corde di contatto è

$$\frac{h^2x^2}{a^4}+\frac{k^2y^2}{b^4}=1.$$

17. Siano descritti dui circoli che passano per l'origine ed hanno i loro centri sulla curva

$$a^2y^2-b^2(2ax-x^2)=0;$$

mostrare che il luogo delle intersezioni ultime di questi circoli è

$$(x^2+y^2-2ax)^2-4a^2x^2-4b^2y^2=0.$$

18. Il circolo che ha per equazione

$$x^2+y^2+2ax+2by+2c=0,$$

è tagliato da un altro cerchio che passa per l'origine ed il di cui centro è sulla curva

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1;$$

dimostrare che la corda che unisce i punti d'intersezione tocca la curva

$$\alpha^2x^2+\beta^2y^2=(ax+by+c)^2.$$

19. Trovare il luogo delle intersezioni ultime di un sistema di linee definitive dall'equazione

$$y \cos \theta - x \operatorname{sen} \theta = c - c \operatorname{sen} \theta \log \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right),$$

in cui θ è il parametro variabile.

Risultato. $2y = c\left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}\right)$.

20. L'equazione di una spirale è $r^n \cos n\theta = a^n$; se si tirano le perpendicolari per le estremità dei raggi vettori l'inviluppo delle perpendicolari è la curva

$$r^m \cos m\theta = a^m, \text{ in cui } m = \frac{n}{n+1}.$$

21. Una serie di ellissi ha lo stesso centro e la stessa direttrice; mostrare che l'inviluppo è una coppia di parabole, ma che l'inviluppo non incontrerà quelle ellissi la di cui eccentricità è minore di $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

22. Trovare il luogo delle intersezioni ultime di un'ellisse che tocca una retta data in un dato punto nell'estremità dell'asse minore, l'eccentricità variando come l'asse maggiore. Quali sono i limiti dell'eccentricità affinchè due ellissi consecutive possano intersegarsi?

23. Una retta è condotta dal fuoco ad un punto qualunque di una sezione conica, ed un circolo è descritto sopra di essa come diametro; mostrare che il luogo delle intersezioni ultime di tutti questi circoli è un circolo, eccettuato, per un certo caso, in cui esso è una linea retta.

24. Mostrare che il luogo delle intersezioni ultime di tutte le corde di un'ellisse che congiungono i punti di contatto delle coppie di tangenti ad angoli retti tra loro è un'ellisse confocale.

25. Trovare il luogo delle intersezioni ultime delle linee

$$x \cos 3\theta + y \operatorname{sen} 3\theta = a (\cos 2\theta)^{\frac{3}{2}},$$

in cui θ è il parametro variabile.

Risultato. $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.

26. Trovare l'inviluppo dei circoli descritti sui raggi di un'ellisse, condotti dal centro, come diametri.

Risultato. $(x^2+y^2)^2=a^2x^2+b^2y^2$.

27. Sopra ogni raggio vettore della curva $r=c\sec^n\frac{\theta}{n}$ come diametro si descrive un circolo; mostrare che l'inviluppo di tutti questi circoli è la curva $r=c\sec^{n-1}\frac{\theta}{n-1}$.

28. Trovare il luogo delle intersezioni ultime di una famiglia di parabole di cui il polo di una data spirale equiangola è il fuoco, e le sue tangenti le direttrici.

Risultato. Una spirale equiangola simile.

29. Siano condotte le perpendicolari dal polo di una spirale equiangola sulle tangenti della curva; trovare l'inviluppo dei circoli descritti su queste perpendicolari come diametri.

Risultato. Una spirale equiangola simile.

30. Da ogni punto di una parabola come centro si descrive un cerchio con un raggio che eccede la distanza focale del punto di una quantità costante; trovare l'inviluppo dei circoli.

Risultato. $(x+c+a)\{y^2+(x-a)^2-c^2\}=0$; in cui c è la quantità costante.

31. Trovare l'inviluppo delle linee rette

$$ax\sec\theta-by\operatorname{cosec}\theta=a^2-b^2.$$

Risultato. $(ax)^{\frac{2}{3}}+(by)^{\frac{2}{3}}=(a^2-b^2)^{\frac{2}{3}}$.

32. Da un punto fisso A sulla circonferenza di un circolo si tiri una corda AP e si biseghi in H, e su PH come diametro si descriva un cerchio; trovare il luogo delle intersezioni ultime del sistema di circoli descritti secondo questa legge.

Risultato. $a^2(x^2+y^2)=(2x^2+2y^2-3ax)^2$;

in cui $x^2+y^2=2ax$ è l'equazione del dato circolo.

CAPITOLO XXVI.

DESCRIZIONE DELLE CURVE.

340. In questo capitolo daremo alcuni esempii sulla descrizione delle curve per mezzo delle loro equazioni.

Es. (1). Sia $y^2 = \frac{x^2(x^2 - 4a^2)}{x^2 - a^2}$................(1).

Si trovi prima il valore di $\frac{dy}{dx}$; prendendo i logaritmi dei due lati dell'equazione e differenziando, abbiamo

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} + \frac{x}{x^2 - 4a^2} - \frac{x}{x^2 - a^2};$$

onde $$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{x\sqrt{(x^2 - 4a^2)}}{\sqrt{(x^2 - a^2)}}\left\{\frac{1}{x} + \frac{x}{x^2 - 4a^2} - \frac{x}{x^2 - a^2}\right\} \ldots (2).$$

In appresso si trovino gli asintoti: poichè

$$y^2 = \frac{x^2\left(1 - \frac{4a^2}{x^2}\right)}{1 - \frac{a^2}{x^2}},$$

onde $$y = \pm x\left(1 - \frac{4a^2}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{a^2}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$
$$= \pm x\left\{1 - \frac{2a^2}{x^2} - \frac{2a^4}{x^4} - \ldots\right\}\left\{1 + \frac{a^2}{2x^2} + \frac{3a^4}{8x^4} + \ldots\right\}$$
$$= \pm x\left\{1 - \frac{3a^2}{2x^2}\ldots\right\}$$
$$= \pm \left\{x - \frac{3a^2}{2x}\ldots\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Quindi $y = x$

ed $y = -x$

sono asintoti.

Inoltre quando $x = \pm a$ vediamo che y è infinita.

Quindi $$x = a$$
ed $$x = -a$$
sono asintoti.

Possiamo ora assegnare diversi valori ad x, e notare i corrispondenti valori di y e $\frac{dy}{dx}$ ottenuti da (1) e (2). Poichè la curva è simmetrica rispetto all'asse delle x, possiamo limitare la nostra attenzione ai valori positivi di y.

Quando $x = 0, \quad y = 0, \quad \frac{dy}{dx} = \pm 2.$

Da $x = 0$ ad $x = a$, y è possibile.

Quando $x = a, \quad y = \infty, \quad \frac{dy}{dx} = \infty.$

Da $x = a$ ad $x = 2a$, y è impossibile.

Quando $x = 2a, \quad y = 0, \quad \frac{dy}{dx} = \infty.$

Quando x è maggiore di $2a$, y è possibile.

Non è necessario di dare valori negativi ad x in questo esempio, poichè la curva è simmetrica rispetto all'asse delle y.

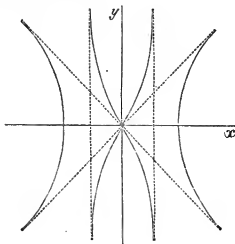
Se tiriamo gli asintoti e facciamo uso della precedente lista di valori particolari di y e $\frac{dy}{dx}$, avremo sufficienti materiali per stabilire la forma generale della curva. Se è necessario, in ogni esempio, possiamo trovare $\frac{d^2y}{dx^2}$, per determinare i punti d'inflessione; inoltre esaminando quando $\frac{dy}{dx}$ svanisce, possiamo determinare i valori massimi e minimi di y.

Se prendiamo il segno superiore nell'equazione (3), abbiamo per l'asintoto

$$y = x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4);$$

e per la curva $$y = x - \frac{3a^2}{2x} \text{ etc} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5).$$

Quando x è molto grande i termini racchiusi nell'etc. dell'equazione (5) saranno molto piccoli rispetto a $\frac{3a^2}{2x}$. Quindi paragonando (4) e (5) vediamo che corrispondendo alla stessa ascissa l'ordinata della curva è *minore* di quella dell'asintoto, e quindi la curva giace *al di sotto* dell'asintoto come è rappresentata nella figura.



341. Es. (2). Si supponga

$$y^2 = \frac{x(x-a)(x-2a)}{x+3a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1);$$

onde

$$\frac{2}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-2a} - \frac{1}{x+3a},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\sqrt{\left\{\frac{x(x-a)(x-2a)}{x+3a}\right\}}\left\{\frac{1}{x} + \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-2a} - \frac{1}{x+3a}\right\}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Inoltre da (1) abbiamo

$$y = \pm x\left(1 - \frac{a}{x}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{2a}{x}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{3a}{x}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \left(1 - \frac{a}{2x} - \frac{a^2}{8x^2}\ldots\right)\left(1 - \frac{a}{x} - \frac{a^2}{2x^2}\ldots\right)\left(1 - \frac{3a}{2x} + \frac{27a^2}{8x^2}\ldots\right).$$

Se le tre serie si moltiplicano insieme abbiamo

$$y = \pm x\left(1 - \frac{3a}{x} + \frac{11a^2}{2x^2} \cdots\right)$$

$$= \pm \left(x - 3a + \frac{11a^2}{2x} \cdots\right) \ldots\ldots\ldots (3).$$

Quindi $y = x - 3a$

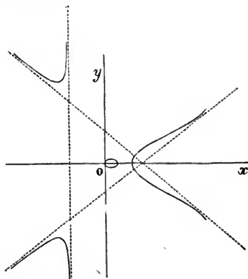
ed $y = -x + 3a$

sono asintoti.

Inoltre $x = -3a$

è un asintoto.

Da (1) e (2) abbiamo i risultati seguenti, limitandoci ai valori positivi di y.



Quando $x = 0$, $y = 0$, $\frac{dy}{dx} = \infty$.

Da $x = 0$ ad $x = a$, y è possibile.

Quando $x = a$, $y = 0$, $\frac{dy}{dx} = \infty$.

Da $x = a$ ad $x = 2a$, y è impossibile.

Quando $\qquad x = 2a, \qquad y = 0, \qquad \frac{dy}{dx} = \infty$.

Quando x è maggiore di $2a$, y è possibile.

Quando x è negativa e tra 0 e $-3a$, y è impossibile.

Quando $\qquad x = -3a, \quad y = \infty, \qquad \frac{dy}{dx} = \infty$.

Quando x giace tra $-3a$ e $-\infty$, y è possibile.

Da (3) vediamo che l'equazione della curva quando x è molto grande è approssimativamente

$$y = x - 3a + \frac{11a^2}{2x};$$

e sia x positiva sia negativa $x - 3a + \frac{11a^2}{2x}$ è numericamente maggiore di $x - 3a$. Quindi la curva giace al di *sopra* dell'asintoto.

342. Negli esempii precedenti il valore di y è dato esplicitamente in termini di x. In modo simile possiamo procedere se x è dato esplicitamente in termini di y. Ma se l'equazione che lega x ed y non ammette facile risoluzione dobbiamo abbandonare questo metodo. In tali casi possiamo trovare gli asintoti con l'Art. 277: possiamo determinare la natura della curva vicino all'origine col metodo esposto nei due prossimi articoli; per mezzo di questi risultati possiamo formarci un'idea della forma della curva. Trasformando l'equazione in coordinate polari saremo abilitati alle volte a tracciarla più accuratamente.

343. Determinare la forma della curva

$$x^4 - ayx^2 + by^3 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

vicino all'origine.

Si supponga che vicino all'origine il termine by^3 possa essere trascurato in paragone degli altri due termini in (1); in questo caso avremmo

$$x^4 - ayx^2 = 0,$$

onde $$x^2 = ay.$$

Ciò fa variare y come x^2, e quindi y^3 varia come x^6. Quindi il termine trascurato by^3 varia come x^6, mentre i termini ritenuti, x^4 ed ayx^2, variano come x^4. Ma prendendo x sufficientemente piccolo x^6 può rendersi tanto piccolo quanto ci piace paragonato con x^4, e quindi vicino all'origine un ramo della curva si può trovare approssimativamente trascurando by^3. Il ramo che così si ottiene, essendo determinato dall'equazione $x^2 = ay$, è una porzione di parabola che ha il suo asse coincidente con quello delle y.

In secondo luogo, supponiamo che vicino all'origine il termine ayx^2 possa essere trascurato in paragone degli altri. Così troviamo

$$x^4 + by^3 = 0;$$

onde y varia come $x^{\frac{4}{3}}$.

Quindi il termine trascurato ayx^2 varierebbe come $x^{2+\frac{4}{3}}$; cioè come $x^{\frac{10}{3}}$, mentre i termini ritenuti varierebbero come x^4. Ma poichè $x^{\frac{10}{3}}$ può rendersi tanto *grande* quanto ci piace paragonato con x^4 prendendo x sufficientemente piccolo, ***non*** otteniamo un ramo approssimato vicino all'origine trascurando ayx^2.

Finalmente, supponiamo che x^4 possa essere trascurato vicino all'origine; allora

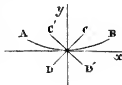
$$by^3 - ax^2y = 0,$$

onde $$by^2 - ax^2 = 0.$$

Quindi y varia come x; i termini ritenuti variano come x^3 ed il termine rigettato come x^4; e così

$$by^2 - ax^2 = 0, \quad \text{o} \quad y = \pm x\sqrt{\frac{a}{b}},$$

ci darà un'approssimazione alla curva vicino all'origine.



La figura mostra la natura della curva vicino all'origine; AB è il ramo parabolico, e CD, $C'D'$, sono i due rami trovati trascurando x^4.

Le conclusioni in questo caso si possono verificare risolvendo l'equazione data rispetto ad x^2. Troviamo così

$$x^2 = \frac{y}{2}\{a \pm \sqrt{(a^2 - 4by)}\}.$$

Si sviluppi $\sqrt{(a^2 - 4by)}$ secondo le potenze di y col teorema binomiale, e si prenda il segno superiore, allora

$$x^2 = ay \text{ approssimativamente;}$$

col segno inferiore

$$x^2 = \frac{b}{a} y^2 \text{ approssimativamente.}$$

In questa maniera, o pure trasformando l'equazione in una forma polare, possiamo completare la descrizione della curva. Si troverà che i rami che si estendono dall'origine a C e B rispettivamente, si uniscono, formando così un cappio. Il ramo dall'origine a D' si estende all'infinito, e non ha asintoto rettilineo. La curva evidentemente è simmetrica rispetto all'asse delle y.

344. Determinare la natura della curva

$$y^4 + ay^2x - x^4 = 0$$

vicino all'origine.

Se trascuriamo x^4 abbiamo

$$y^4 + ay^2x = 0,$$

onde

$$y^2 = -ax.$$

Quindi x varia come y^2; il termine trascurato varia come y^8, mentre i termini ritenuti variano come y^4, onde abbiamo nella parabola $y^2 = -ax$ un'approssimazione alla curva data vicino all'origine.

In secondo luogo, rigettiamo il termine ay^2x; così

$$y^4 - x^4 = 0,$$

onde

$$y = \pm x.$$

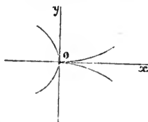
Quindi y varia come x; il termine rigettato varia come x^3, ed i termini ritenuti variano come x^4; quindi questo *non* ci dà un ramo approssimato.

Finalmente, si rigetti y^4; così

$$ay^2x - x^4 = 0,$$

onde $$y^2 = \frac{x^3}{a}.$$

Quindi y^2 varia come x^3; il termine rigettato varia come x^6, ed i termini ritenuti variano come x^4, e per conseguenza otteniamo un ramo approssimato.



Il ramo a sinistra dell'asse delle y è quello dato da $y^2 = -ax$, e la cuspide a dritta dell'asse delle y è quella data da $y^2 = \frac{x^3}{a}$. In questo esempio, si può trovare y^2 in termini di x e tracciare l'intera curva.

345. Possiamo osservare che negli esempii degli articoli precedenti, la supposizione che si trovò inammissibile vicino all'origine, sarà ammissibile per punti ad una distanza molto grande dall'origine. Così se

$$y^4 + ay^2x - x^4 = 0,$$

quando x ed y sono indefinitamente grandi, ay^2x può essere trascurato in paragone di y^4 ed x^4; ed $y^4 = x^4$, o $y = \pm x$, sarà un' approssimazione nei punti lontani dall' origine. Se troviamo gli asintoti con l'Art. 277, avremo

$$y = \pm \left(x - \frac{a}{4}\right);$$

cui $$y = \pm x$$

si può considerare un'approssimazione quando x ed y sono indefinitamente grandi.

346. Si cerchi la natura della curva

$$y^4 + xy^3 + ax^2y - bx^3 = 0$$

vicino all' origine.

Supponiamo $$ax^2y - bx^3 = 0$$

come un'approssimazione vicino all'origine. Quindi

$$ay = bx,$$

onde y varia come x,

i termini ritenuti variano come x^3, e quelli rigettati variano come x^4, ed abbiamo perciò un' approssimazione alla curva nell'origine. Se esaminiamo tutt' i sei casi che si presentano ritenendo due dei termini della data equazione e rigettando gli altri due, troveremo che la sola altra ammissibile supposizione è, che xy^3 e bx^3 possono essere rigettati, ed

$$y^4 + ax^2y = 0,$$

o $$y^3 = -ax^2$$

ci dà un ramo approssimato. Sarà facile di tracciare i rami che abbiamo trovato; l'equazione $y^3 = -ax^2$ ci dà una cuspide, i due rami essendo dai due lati della parte negativa dell' asse delle y.

347. Se in alcuni esempii vogliamo solamente trovare le *direzioni delle tangenti nell' origine*, possiamo pervenire ad esse immediatamente, come si è mostrato nell'Art. 195.

Si supponga $$y^4 + xy^3 + ax^2y - bx^3 = 0,$$

onde $$(y + x)\left(\frac{y}{x}\right)^3 + a\frac{y}{x} - b = 0.$$

Quindi, quando x ed y svaniscono, abbiamo

$$\text{Limite di } \frac{y}{x} = \frac{b}{a}.$$

Oltre a ciò, il limite di $\frac{y}{x}$ *può* avere un valore infinito, e questo può essere determinato esaminando se $\frac{x}{y}$ ha zero per limite. L'equazione data può essere messa sotto la forma

$$y + x + \left(\frac{x}{y}\right)^2 \left\{a - b\frac{x}{y}\right\} = 0.$$

Quindi uno dei valori limiti di $\frac{x}{y}$ è zero.

In simil modo, se

$$y^4 + ay^2x - x^4 = 0,$$

abbiamo
$$y\left(\frac{y}{x}\right)^3 + a\left(\frac{y}{x}\right)^2 - x = 0.$$

Quindi $\frac{y}{x}$ ha zero per uno dei suoi valori limiti. Inoltre dall'equazione data possiamo dedurre

$$y + a\frac{x}{y} - x\left(\frac{x}{y}\right)^3 = 0.$$

Quindi $\frac{x}{y}$ ha zero per uno dei suoi valori limiti. Così $\frac{y}{x}$ può essere zero o infinito quando x ed y diminuiscono indefinitamente, e quindi gli assi delle x e delle y sono tangenti ai rami per l'origine.

348. Daremo ora alcuni esempii di curve polari.

Si supponga
$$r = a\sec\frac{\theta}{3},$$

onde
$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{a}{3}\frac{\operatorname{sen}\frac{\theta}{3}}{\cos^2\frac{\theta}{3}},$$

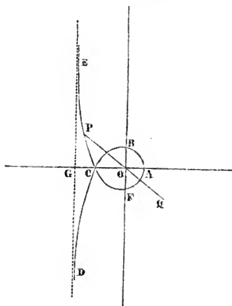
$$\tan\varphi = r\frac{d\theta}{dr} = 3\cot\frac{\theta}{3}. \quad \text{(Art. 279)}.$$

$$\text{La sottangente polare} = r^2\frac{d\theta}{dr} = 3a\operatorname{cosec}\frac{\theta}{3}.$$

Quando $\frac{\theta}{3} = \frac{\pi}{2}$, r è infinito, e la sottangente polare $= 3a$; quindi abbiamo un asintoto. Quando θ cresce da 0 a $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{dr}{d\theta}$ è positivo, ed r è positivo e cresce con θ. Quando θ cre-

sce da $\frac{3\pi}{2}$ a 3π, r è negativo, e $\frac{dr}{d\theta}$ è positivo sicchè r diminuisce numericamente.

Per condurre l'asintoto procediamo così: poichè, quando



$\theta = \frac{3\pi}{2}$, r è infinito, e la sottangente polare è $3a$, l'occhio deve essere supposto in O guardando lungo OF, ed una distanza $OG = 3a$ deve essere misurata a dritta di OF e perpendicolare ad essa; una retta condotta per G parallela ad OF è l'asintoto richiesto.

Quando θ varia da 0 a $\frac{3\pi}{2}$ si descrive il ramo $ABCD$, che taglia OA ad angoli retti in A poichè $\tan\varphi = \infty$ quando $\theta = 0$. Quando θ diviene maggiore di $\frac{3\pi}{2}$, r è negativo, e secondo l'ordinaria convenzione rispetto ai segni, deve essere misurato in una direzione *opposta* a quella che avrebbe se fosse positivo. Per esempio, se l'angolo AOQ misurato

nell'ordinaria via in giro da OA è $\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$ il corrispondente valore di r è

$$\frac{a}{\cos\frac{1}{3}\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} \text{ o } -\frac{a}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{12}} \text{ o } -a\sqrt{2}\,(\sqrt{3}+1);$$

quindi prendiamo $OP=a\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)$ misurandola lungo QO prolungata. In questo modo, quando θ varia da $\frac{3\pi}{2}$ a 3π, otteniamo la porzione $ECFA$ della curva.

Se supponiamo θ negativo, o positivo e maggiore di 3π, otterremo solamente ripetizioni di rami già trovati.

349. Un errore molto comune nel descrivere le curve polari si commette rispetto agli asintoti. Per esempio, se r è infinito quando $\theta=0$, si ritiene che la linea iniziale è un asintoto. Ciò contiene un doppio errore, poichè in primo luogo da che r è infinito non segue che vi *è* un asintoto; ed in secondo luogo, se vi è un asintoto esso può essere *parallelo* alla linea iniziale invece di coincidere con essa.

Per esempio, l'equazione polare della parabola dal vertice è

$$r=\frac{4a\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}.$$

Qui quando $\theta=0$, r è ∞, ma la curva non ha asintoto. Nella curva

$$r=\frac{a}{\operatorname{sen}\frac{\theta}{3}},$$

quando $\theta=0$, r è infinito; vi è un asintoto, ma non coincide con la linea iniziale; si troverà che è parallelo ad essa e ad una distanza $3a$.

350. Descrivere la curva

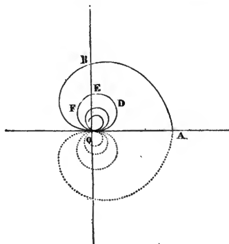
$$r=\frac{a\operatorname{sen}\theta}{\theta}.$$

Quì
$$\frac{dr}{d\theta}=\frac{a(\theta\cos\theta-\operatorname{sen}\theta)}{\theta^2},$$
$$\tan\varphi=\frac{\theta\operatorname{sen}\theta}{\theta\cos\theta-\operatorname{sen}\theta}.$$

Siccome r non è mai infinito non vi è asintoto; r è positivo da $\theta=0$ a $\theta=\pi$, negativo da $\theta=\pi$ a $\theta=2\pi$, e così di seguito.

Quando $\theta=0$, $\tan\varphi$ prende la forma $\frac{0}{0}$; esaminandola si troverà infinita.

La curva incomincia da A, attraversando la linea iniziale

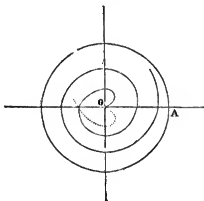


ad angoli retti, poichè ivi $\tan\varphi$ è infinita: quando θ varia da 0 a π si descrive la porzione ABO; quando θ varia da π a 2π si descrive la porzione $ODEFO$, e così di seguito. La curva forma un numero infinito di cappî, ciascuno minore del precedente e tutti che passano per O.

Se attribuiamo valori negativi a θ otteniamo la parte punteggiata posta *al di sotto* della linea OA.

351. Descrivere la curva
$$r=\frac{a\theta^2}{1+\theta^2}.$$

In questo caso la curva incomincia dal polo O e fa un in-



finito numero di rivoluzioni intorno ad esso; r non può mai divenire grande quanto a, al qual valore però esso si avvicina continuamente. Quindi $r = a$ è l'equazione di ***un circolo asintotico***, al quale la curva si avvicina continuamente quando θ cresce senza limite.

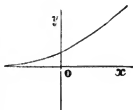
Se diamo a θ valori negativi, abbiamo un ramo simile a quello ottenuto per i valori positivi di θ. Esso è rappresentato nella figura dalla porzione punteggiata.

352. Daremo ora le equazioni e le figure di alcune poche curve che si presentano frequentemente nei problemi.

La Curva Logaritmica.

L'equazione di questa curva è

$$y = be^{\frac{x}{c}};$$



o, ciò che è una forma equivalente,

$$y = ba^x.$$

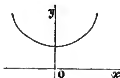
La curva si estende all'infinito secondo le due direzioni la positiva e la negativa dell'asse delle x. Quando

x cresce numericamente nella direzione negativa, y tende al limite zero, sicchè l'asse delle x è un asintoto.

353. *La Catenaria.*

L'equazione di questa curva è

$$y = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}\right).$$



Questa è la curva secondo la quale si disporrebbe una catena flessibile quando fosse sospesa a due punti, come si mostra nelle opere sulla Statica.

354. *La Spirale Logaritmica.*

L'equazione di questa curva è

$$r = be^{\frac{\theta}{c}},$$

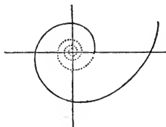
o

$$r = ba^{\theta}.$$

Prendendo la prima forma abbiamo

$$\tan \varphi = r\frac{d\theta}{dr} = c.$$

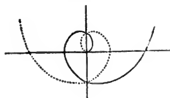
Poichè così φ è costante la curva si chiama anche la *spirale equiangola.*



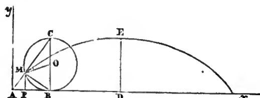
La parte punteggiata nasce dai valori negativi di θ.

355. *La Spirale di Archimede.*

$$r = a\theta.$$



356. *La Cicloide.*



La cicloide è descritta da un punto sulla circonferenza di un circolo quando il circolo *rotola* lungo una linea retta.

Sia Ax la retta lungo la quale rotola il circolo;

M il punto fisso nel circolo BMC che descrive la cicloide;

A il punto della linea Ax col quale M era primitivamente in contatto;

O il centro del circolo:

$$AP = x, \quad MP = y, \quad MOB = \varphi, \quad OB = a.$$

L'arco $MB = a\varphi$, e per la natura della curva esso è eguale ad AB;

onde
$$x = a\varphi - PB = a\varphi - a \operatorname{sen} \varphi,$$
$$y = a - a \cos \varphi.$$

Se eliminiamo φ abbiamo

$$x = a \cos^{-1} \frac{a - y}{a} - \sqrt{(2ay - y^2)}.$$

357. Dall'ultima equazione abbiamo

$$\frac{dx}{dy} = \sqrt{\left(\frac{y}{2a-y}\right)}.$$

Quindi l'equazione della tangente in M è

$$y' - y = \sqrt{\left(\frac{2a-y}{y}\right)}\,(x' - x),$$

e della normale

$$y' - y = -\sqrt{\left(\frac{y}{2a-y}\right)}\,(x' - x).$$

Se nell'ultima equazione poniamo $y' = 0$, abbiamo

$$x' - x = \sqrt{\{y\,(2a - y)\}} = a \operatorname{sen}\varphi = PB.$$

Quindi MB è la direzione della normale in M, e per conseguenza MC è la direzione della tangente in M.

Se nelle equazioni dell'Art. 356 si pone $\varphi = \pi$, abbiamo $y = 2a$ ed $x = a\pi$ per le coordinate del vertice E. Quindi

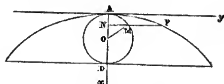
$$PD = a\pi - a\varphi + a \operatorname{sen}\varphi$$
$$= a\,(\theta + \operatorname{sen}\theta), \qquad \text{se } \theta = \pi - \varphi.$$

Inoltre la distanza di M da una linea condotta per E parallela ad Ax è

$$2a - a\,(1 - \cos\varphi) \text{ o } a\,(1 - \cos\theta).$$

358. Se prendiamo il vertice come origine, e la tangente in quel punto per asse delle y, abbiamo per l'ultimo articolo

$$\left.\begin{aligned} y &= PN = a\,(\theta + \operatorname{sen}\theta) \\ x &= AN = a\,(1 - \cos\theta) \end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$



Si descriva un semicircolo sopra AD come diametro: incontri PN questo circolo in M, e si congiunga M col centro O; allora

$$AN = a\,(1 - \cos AOM);$$

onde

$$AOM = \theta.$$

Poichè l'arco $AM = a\theta$, segue che

$$MP = \text{arc}\, AM.$$

Da (1) abbiamo

$$y = a \cos^{-1}\frac{a-x}{a} + \sqrt{(2ax - x^2)} \dots\dots\dots (2),$$

onde

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\left(\frac{2a-x}{x}\right)}.$$

Se s dinota l'arco AP, abbiamo

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}} = \sqrt{\left(\frac{2a}{x}\right)},$$

onde

$$s = \sqrt{(8ax)},$$

come si vedrà nel Calcolo Integrale.

La normale alla curva in D è parallela ad MD, come possiamo vedere per l'Art. 357 o con una indipendente investigazione.

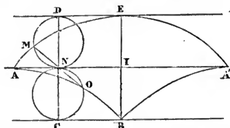
Per la proprietà del circolo segue che

$$MD = 2a \cos\frac{\theta}{2}.$$

Se cerchiamo il valore del raggio di curvatura in P lo troveremo essere due volte MD, cioè,

$$4a \cos\frac{\theta}{2}, \quad \text{o} \quad 2\sqrt{(4a^2 - 2ax)}.$$

359. *L'evoluta della cicloide è una cicloide eguale.*



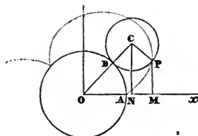
Infatti apparisce dall'Art. 358 che il raggio di curvatura in un punto M di una cicloide è due volte MN. Quindi se prolunghiamo MN in O, facendo $NO = MN$, O è il centro di curvatura corrispondente al punto M. Si tiri EIB e si faccia $IB = 2a$; si tiri BC parallela ad ED; il circolo descritto sopra NC come diametro passerà per O.

L'arco $NO =$ all'arco MN e quindi $= AN$,

onde arc $OC = NI = CB$.

Quindi O è un punto di una cicloide generata dal rotolare di un circolo di raggio a lungo BC. Quindi l'evoluta della cicloide AEA' è composta delle due semicicloidi AB ed $A'B$.

360. L'epicicloide è la curva descritta da un punto sulla circonferenza di un cerchio che rotola sulla *parte esterna* di un circolo fisso.



Siano O e C rispettivamente i centri del cerchio fisso e del cerchio che rotola, B il punto di contatto, P il punto descrivente, A la sua posizione iniziale. Si prenda OA per asse delle x; si tirino CN, PM, perpendicolari all'asse delle x. Sia

$$OB = a,\ BC = b,\ AOB = \theta,\ BCP = \varphi.$$

Allora
$$\begin{aligned} x &= ON + NM \\ &= (a+b)\cos\theta + b\,\text{sen}\left(\varphi - \tfrac{1}{2}\pi + \theta\right) \\ &= (a+b)\cos\theta - b\cos(\varphi + \theta). \end{aligned}$$

Ma l'arco $AB =$ all'arco BP, pel modo di generazione, cioè, $a\theta = b\varphi$, onde

$$x = (a+b)\cos\theta - b\cos\frac{a+b}{b}\theta.$$

Similmente

$$y = (a+b)\,\text{sen}\,\theta - b\,\text{sen}\frac{a+b}{b}\theta.$$

L'ipocicloide è la curva descritta da un punto sulla circonferenza di un circolo che rotola nella *parte interna* di un cerchio fisso.

Può trovarsi con un metodo simile al precedente che per l'ipocicloide

$$x = (a - b) \cos \theta + b \cos \frac{a - b}{b} \theta,$$

$$y = (a + b) \operatorname{sen} \theta - b \operatorname{sen} \frac{a - b}{b} \theta.$$

361. Il raggio del circolo che rotola può essere maggiore o minore del raggio del circolo fisso sì nell'epicicloide che nell'ipocicloide; è facile però ricavare dalla figura che una ipocicloide nella quale il raggio del circolo che rotola è maggiore di quello del circolo fisso si può ritenere come una epicicloide. Infatti nelle equazioni per l'ipocicloide si ponga $\frac{b - a}{b} \theta = \varphi$; allora quelle equazioni si possono scrivere

$$x = (a + b - a) \cos \varphi - (b - a) \cos \frac{a + b - a}{b - a} \varphi,$$

$$y = (a + b - a) \operatorname{sen} \varphi - (b - a) \operatorname{sen} \frac{a + b - a}{b - a} \varphi;$$

queste sono le equazioni per un'epicicloide nella quale il raggio del circolo fisso è a, ed il raggio del circolo che rotola è $b - a$.

Similmente possiamo mostrare che un'ipocicloide nella quale il raggio del circolo che rotola è *maggiore* della metà del raggio del circolo fisso si può considerare come un'ipocicloide nella quale il raggio del circolo che rotola è *minore* della metà del raggio del circolo fisso. Quindi possiamo ottenere *tutte* le epicicloidi ed ipocicloidi se in aggiunta alle epicicloidi prendiamo le ipocicloidi nelle quali il raggio del circolo che rotola è minore della metà del raggio del circolo fisso.

362. Se a e b sono nel rapporto di due numeri interi possiamo eliminare θ tra le due equazioni che determinano un'epicicloide o un'ipocicloide, e così ottenere l'equazione della curva in una forma algebrica. Per esempio, supponiamo nell'ipocicloide che $a = 4b$; allora

$$x = 3b\cos\theta + b\cos 3\theta = 4b\cos^3\theta,$$
$$y = 3b\,\mathrm{sen}\,\theta - b\,\mathrm{sen}\,3\theta = 4b\,\mathrm{sen}^3\theta;$$

onde
$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

Se nell'ipocicloide supponiamo $a = 2b$, si ottiene
$$x = 2b\cos\theta \text{ ed } y = 0;$$
così y è sempre zero ed x può avere un valore qualunque tra $-a$ e $+a$; quindi la curva si riduce ad un diametro del circolo fisso.

363. Se nell'Art. 360 il punto descrivente, invece di essere *sulla* circonferenza del circolo che rotola, è sopra un raggio fisso di quel circolo, ma *al di dentro*, o *al di fuori* della circonferenza, la curva generata si chiama l'epitrocoide quando il circolo che rotola si muove dalla parte esterna del circolo fisso, e l'ipotrocoide quando il circolo che rotola si muove dalla parte interna del circolo fisso. Nel primo caso abbiamo
$$x = (a + b)\cos\theta - mb\cos\frac{a+b}{b}\theta,$$
$$y = (a + b)\,\mathrm{sen}\,\theta - mb\,\mathrm{sen}\frac{a+b}{b}\theta,$$
e nell'altro
$$x = (a - b)\cos\theta + mb\cos\frac{a-b}{b}\theta,$$
$$y = (a - b)\,\mathrm{sen}\,\theta - mb\,\mathrm{sen}\frac{a-b}{b}\theta,$$
mb essendo la distanza del punto descrivente dal centro del circolo che rotola.

364. Se un circolo rotola lungo una linea retta la curva descritta da un punto *sulla* circonferenza del circolo che rotola, come già si è stabilito, si chiama la cicloide. Se il punto descrivente è *al di fuori* della circonferenza la curva si chiama la cicloide *allungata*, se al di dentro, la cicloide *accorciata*; si adopera ancora la parola *trocoide* per dinotare sì la cicloide *allungata* che la cicloide *accorciata*.

Le equazioni

$$x = a(1 - m\cos\theta),$$
$$y = a(\theta + m\,\mathrm{sen}\,\theta),$$

rappresenteranno una cicloide allungata, una cicloide comune, o una cicloide accorciata, secondo che m è maggiore dell' unità, eguale all' unità, o minore dell' unità. Si vegga l' Art. 358.

ESEMPII.

Descrivere le seguenti curve:

1. $y^3 = ax^2 - x^3$.
2. $y^3 = a^3 - x^3$.
3. $y^2(x - a) = (x + a)x^2$.
4. $x^2y^2 = a^2(x^2 - y^2)$.
5. $y^2(x - 4a) = ax(x - 3a)$.
6. $(x^2 + y^2)^3 = 4a^2x^2y^2$.
7. $y^2(2a - x) = x^3$. (La cissoide).
8. $x^2y^2 = (a^2 - y^2)(b + y)^2$. (La concoide). Si trasporti l'origine al punto $(0, -b)$ e quindi si passi alle coordinate polari e si avrà l'equazione

$$r = b\,\mathrm{cosec}\,\theta \pm a.$$

9. $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$. (La lemniscata).
10. $r = a\theta\,\mathrm{sen}\,\theta$.
11. $r = a(\theta + \mathrm{sen}\,\theta)$.
12. $r\,\mathrm{sen}\,\theta = a\cos^2\theta$.
13. $r = \log\mathrm{sen}\,\theta$.
14. $r^2\cos\theta = a^2\mathrm{sen}^2 3\theta$.
15. $r^2\cos\theta = a^2\mathrm{sen}^3\theta$.
16. $r(\theta - \mathrm{sen}\,\theta) = a(\theta + \mathrm{sen}\,\theta)$.
17. $r = a(1 - \cos\theta)$. (La cardioide).
18. $r\theta = a$. (La spirale iperbolica).
19. Trovare le equazioni della tangente e della normale nel punto P dell'epicicloide. Si vegga la Fig. dell' Art. 360. Mostrare che la normale in P passa per B.
20. Descrivere la curva determinata dalle equazioni

$$x = a(1 - \cos\varphi), \quad y = a\varphi;$$

questa curva si chiama *la compagna della cicloide.*

21. Ottenere in una forma algebrica l'equazione dell'epicicloide per la quale $a = 2b$.

Risultato. $4(x^2 + y^2 - a^2)^3 = 27a^4y^2$.

22. Mostrare che quando $a = b$ l'epicicloide diviene la cardioide.

23. Descrivere la curva che ha per equazione $r = a \cos\frac{\theta}{3}$; e mostrare che se A è il punto in cui la curva incontra il primo raggio prolungato indietro e $PSQR$ una corda qualunque condotta pel polo S e che incontra la curva in P, Q, ed R, gli angoli PAQ e QAR sono ciascuno di $60°$, e l'angolo ASQ è eguale a tre volte l'angolo APS.

24. Mostrare che le equazioni

$$r = a - a \tan\theta \quad \text{e} \quad 2a = r - r \tan\theta$$

rappresentano la stessa curva in differenti posizioni, e che i raggi vettori ai punti d'intersezione bisegano gli angoli tra le tangenti in quei punti.

25. Descrivere la curva $\frac{y}{c} = \operatorname{sen}\frac{x}{a} \log\left(m \operatorname{sen}\frac{x}{a}\right)$, (1) quando m è maggiore dell'unità, (2) quando m è eguale all'unità, (3) quando m è minore dell'unità e maggiore del valore reciproco della base dei logaritmi Neperiani, (4) quando m è minore del valore reciproco della base dei logaritmi Neperiani.

CAPITOLO XXVII.

SUI DIFFERENZIALI.

365. Nelle pagine precedenti abbiamo dato le proposizioni che si trovano ordinariamente nei trattati sul Calcolo Differenziale, ed abbiamo adoperato il metodo dei limiti in tutte le dimostrazioni. Offriamo ora alcune poche osservazioni sopra un altro metodo di trattare il soggetto.

Nello sviluppo di $f(x+h)$ col Teorema di Taylor, il coefficiente di h si mostrò essere quella funzione di x che avevamo chiamato il coefficiente differenziale di $f(x)$ rispetto ad x. Lagrange propose di *definire* il coefficiente differenziale di $f'(x)$ rispetto ad *x come il coefficiente di h nello sviluppo di* $f(x+h)$, e così di evitare ogni ricorso alla teoria dei limiti. Le vedute di Lagrange furono proposte verso la fine del secolo scorso e furono generalmente adottate dagli scrittori elementari.

Un'obiezione a questo metodo è il suo uso delle serie infinite senza assicurare che queste serie siano *convergenti*, e la dimostrazione che $f(x+h)$ possa sempre svilupparsi in una serie secondo le potenze ascendenti di h, che si prende per fondamento del Calcolo Differenziale, ha serii difetti. Un'altra obiezione si è l'impossibilità di evitare d'introdurre la nozione di un limite nelle applicazioni del soggetto alla geometria ed alla meccanica; la definizione della linea tangente di una curva può essere data come un esempio.

366. Quasi tutti i recenti trattati sul Calcolo Differenziale hanno seguito il metodo dei limiti, ed il solo punto d'importanza nel quale vi sia una differenza tra essi è rispetto all'uso dei *differenziali*. In questa opera $\frac{dy}{dx}$ è stato definito

come *un* simbolo, così; se $y = \varphi(x)$ *il limite di* $\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h}$ *quando* h *diminuisce indefinitamente è dinotato da* $\frac{dy}{dx}$. Alcuni scrittori aggiungono le seguenti parole: *le quantità* dx *e* dy *si chiamano i differenziali di* x *ed* y *rispettivamente; i loro valori assoluti sono indeterminati, ed essi possono essere o finiti o indefinitamente piccoli purchè le loro grandezze relative siano tali che* $\frac{dy}{dx}$ *sia eguale al limite sopra menzionato.*

Con questo significato assegnato a dy e dx possono incontrarsi equazioni come

$$dy = \varphi'(x)\, dx,$$

in cui $\varphi'(x)$ è il coefficiente differenziale di $\varphi(x)$ o y.

Le equazioni espresse per mezzo dei differenziali sono in generale capaci di immediata traduzione nel linguaggio dei coefficienti differenziali. Per esempio, se x ed y sono le coordinate di un punto di una curva e sono funzioni di una terza variabile t, e se s dinota il corrispondente arco della curva a cominciare da un punto fisso, abbiamo, per l'Art. 307,

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2,$$

e con la differenziazione

$$\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{ds}{dt}\frac{d^2s}{dt^2}.$$

Uno scrittore che adoperi i *differenziali* esprimerà questi risultati così,

$$dx^2 + dy^2 = ds^2,$$
$$dx d^2x + dy d^2y = ds d^2s.$$

Lo studente può considerare queste ultime come semplicemente modi abbreviati di scrivere le precedenti equazioni, e può prendere dx, dy, d^2x, ... come messi in luogo di

$$\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \ldots \text{ rispettivamente.}$$

367. Sia u una funzione di un numero qualunque di variabili, per esempio tre, sicchè $u = \varphi(x, y, z)$. Se supponiamo

x, y, z, tutte funzioni di una variabile t, e per brevità poniamo

$$\frac{du}{dt} = Du, \quad \frac{dx}{dt} = Dx, \quad \frac{dy}{dt} = Dy, \quad \frac{dz}{dt} = Dz,$$

abbiamo

$$Du = \left(\frac{d\varphi}{dx}\right) Dx + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right) Dy + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right) Dz \ldots\ldots\ldots (1).$$

Nelle opere sul Calcolo Differenziale, che adoperano i *differenziali*, troviamo un'equazione simile alla precedente che si presenta in un periodo anteriore, cioè,

$$du = \left(\frac{d\varphi}{dx}\right) dx + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right) dy + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right) dz \ldots\ldots\ldots (2).$$

L'introduzione e l'uso di questa equazione forma la principale differenza tra tali opere ed una che, come la presente, adopera solamente *coefficienti differenziali*. Per stabilire (2) si adotta il metodo seguente.

Sia $$u = \varphi(x, y, z),$$

ed $$u + \Delta u = \varphi(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z),$$

onde

$$\Delta u = \varphi(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - \varphi(x, y, z)$$

$$= \frac{\varphi(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - \varphi(x, y + \Delta y, z + \Delta z)}{\Delta x} \Delta x$$

$$+ \frac{\varphi(x, y + \Delta y, z + \Delta z) - \varphi(x, y, z + \Delta z)}{\Delta y} \Delta y$$

$$+ \frac{\varphi(x, y, z + \Delta z) - \varphi(x, y, z)}{\Delta z} \Delta z \ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Se Δx, Δy, e Δz, diminuiscono senza limite, la quantità

$$\frac{\varphi(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - \varphi(x, y + \Delta y, z + \Delta z)}{\Delta x}$$

si avvicina al limite $\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)$. Se quindi poniamo per questa quantità $\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) + \alpha$, sappiamo che α diminuisce senza limite

quando Δx, Δy, e Δz, diminuiscono del pari. In questo modo possiamo dedurre da (3) l'equazione

$$\Delta u = \left\{\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)+\alpha\right\}\Delta x + \left\{\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)+\beta\right\}\Delta y + \left\{\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)+\gamma\right\}\Delta z \ldots\ldots (4),$$

in cui α, β, γ, diminuiscono tutte senza limite al pari di Δx, Δy, Δz. Quindi se du, dx, dy, e dz, dinotano quantità le di cui grandezze assolute sono indeterminate, ma di cui le grandezze *relative* sono quelle alle quali Δu, Δx, Δy, e Δz, si avvicinano rispettivamente come loro limiti quando esse diminuiscono indefinitamente, abbiamo

$$du = \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)dx + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)dy + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)dz.$$

Avendo così dimostrato (2), diamo un esempio della sua applicazione. Poichè nello stabilire (2) non avevamo alcuna occasione da considerare se x, y, e z, erano indipendenti o no, il risultato è vero generalmente, qualunque relazione sia data o supposta tra le variabili. Se, per esempio, $\varphi(x, y, z)$ è sempre $= 0$, abbiamo

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)dx + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)dy + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)dz = 0 \ldots\ldots\ldots (5).$$

Ora se $\varphi(x, y, z) = 0$ è la sola equazione che lega x, y, e z, possiamo se ci piace variare x e z senza mutare y. Quindi nella investigazione precedente $\Delta y = 0$ da per tutto, e quindi in (5) $dy = 0$; così abbiamo

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)dx + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)dz = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (6).$$

Quindi
$$\frac{dz}{dx} = -\frac{\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)}{\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)},$$

in cui $\frac{dz}{dx}$ è il coefficiente differenziale di z, supponendo variare x ed y essere costante. Si vegga l'Art. 188.

368. Si occuperebbe troppo spazio se procedessimo innanzi sul soggetto dei differenziali. I coefficienti differenziali sono

stati adoperati esclusivamente nella presente opera, per la convinzione che il soggetto è così presentato nella forma più chiara, e che se alcune delle operazioni sono così rese alquanto più lunghe di quel che sarebbero altrimenti, vi è nell'istesso tempo molto minore facilità di errare. L'equazione (2) è certamente di grande uso nelle applicazioni del Calcolo Differenziale, particolarmente nelle parti superiori della Geometria a Tre Dimensioni: dopo le osservazioni già fatte, lo studente probabilmente incontrerà poca difficoltà in quelle applicazioni. Forse egli potrà essere assistito ulteriormente riferendosi al teorema per lo sviluppo di una funzione di tre variabili. Se $u = \varphi(x, y, z)$, abbiamo

$$\varphi(x+h,\, y+k,\, z+l) - \varphi(x, y, z) \text{ o } \Delta u$$

$$= h\frac{du}{dx} + k\frac{du}{dy} + l\frac{du}{dz} + R,$$

in cui R racchiude i quadrati ed i prodotti di h, k, l. Quindi quanto più piccoli si prendono h, k, l, tanto più piccolo è l'errore contenuto nell'asserzione

$$\Delta u = h\frac{du}{dx} + k\frac{du}{dy} + l\frac{du}{dz}.$$

ESEMPII DIVERSI.

1. Dato
$$u = \operatorname{sen}^{-1}\sqrt{x} - \sqrt{(x - x^2)},$$
$$v = \cos^{-1}(x^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{6}}) - (x^{\frac{2}{3}}a^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{4}{3}}a^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}},$$
trovare $\frac{du}{dv}$.

2. Trovare i valori massimi e minimi di $(\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen} x}$.

3. Trovare l'area del più grande triangolo isoscele che si può iscrivere in una data ellisse, il triangolo avendo il suo vertice coincidente con una estremità dell'asse maggiore.

4. $APP'B$ è un semicerchio il di cui diametro è AB, e PP' è parallela ad AB. Si tirino AP' e BP, che s'incontrino in Q; trovare la posizione di P e P' in modo che il triangolo PQP' sia un massimo.

5. Una figura formata di un rettangolo e di un triangolo isoscele è iscritta in un semicerchio; determinare le sue dimensioni affinchè la sua area sia un massimo.

6. Trovare il cono di minima superficie, esclusa la base, che può circondare una data sfera.

Risultato. Il seno del semi-angolo al vertice $=\sqrt{2}-1$.

7. Trovare il cono di minima superficie, inclusa la base, che può circondare una data sfera.

Risultato. Il seno del semiangolo al vertice $=\frac{1}{3}$.

8. Trovare il valore massimo di $\cos\theta\cos\varphi\cos\psi$, in cui $\theta+\varphi+\psi=\pi$.

9. Trasformare $\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}=0$, prendendo

$$x'=l_1x+m_1y,$$
$$y'=l_2x+m_2y.$$

10. Un'equazione fra tre variabili contiene n funzioni arbitrarie di una di esse, e $4n^2-n-1$ costanti arbitrarie; mostrare che l'equazione generalmente deve essere differenziata almeno $4n-2$ volte affinchè le funzioni e le costanti possano essere eliminate.

11. Se V è una funzione qualunque di x, y, z, e V' il valore di V quando si sostituisce vw per x, wu per y, ed uv per z; allora

$$x^2\frac{d^2V}{dx^2}+y^2\frac{d^2V}{dy^2}+z^2\frac{d^2V}{dz^2}+yz\frac{d^2V}{dy\,dz}+zx\frac{d^2V}{dz\,dx}+xy\frac{d^2V}{dx\,dy}$$
$$=\frac{1}{2}\left\{u^2\frac{d^2V'}{du^2}+v^2\frac{d^2V'}{dv^2}+w^2\frac{d^2V'}{dw^2}\right\}.$$

12. Se $y=e^{zx}+e^{-zx}$, e $z+xe^{-2zx}=0$, dimostrare che il termine generale di y quando si sviluppa in serie è

$$\frac{x^{2n}}{\lfloor n}\left\{(2n+1)^{n-1}-(2n-1)^{n-1}\right\}.$$

13. Se $y=x+\alpha\psi(y)+\beta\varphi(y)+\ldots\ldots$, allora

$$F(y)=F(x)+\ldots+\frac{1}{\lfloor n}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left[F'(x)\left\{\alpha\psi(x)+\beta\varphi(x)+\ldots\right\}^n\right]+\ldots$$

14. Se $y = z + x\varphi(y)$, ed $y' = z' + x'\psi(y')$, z e z' essendo variabili indipendenti, mostrare che il termine generale nello sviluppo di $f(y, y')$ secondo le potenze ed i prodotti di x ed x' è

$$\frac{d^{m+n-2}}{dz^{m-1}\,dz'^{n-1}}\left\{\overline{\varphi(z)}^{\,m}\,\overline{\psi(z')}^{\,n}\,\frac{d^2f(z, z')}{dz\,dz'}\right\}\frac{x^m}{\underline{|m}}\cdot\frac{x'^n}{\underline{|n}}\,.$$

Trovare il coefficiente di x^2x' nello sviluppo di $\cos(\alpha y + \alpha' y')$, quando $y = z + x \operatorname{sen} y$, ed $y' = z' + x' \operatorname{sen} y'$.

15. In ogni curva la parte della tangente tra il punto di contatto e la perpendicolare dall'origine sulla tangente è eguale ad $\dfrac{rdr}{ds}$.

16. Mostrare che l'equazione della normale in ogni punto di una curva può essere messa sotto la forma

$$\frac{x' - x}{\dfrac{d^2x}{ds^2}} = \frac{y' - y}{\dfrac{d^2y}{ds^2}}\,.$$

Mostrare che questa equazione è l'espressione analitica del fatto, che se si tira una tangente ad una curva in un punto P, e nella tangente si prende PT eguale all'arco PQ e dalla stessa parte di P, allora la linea QT è ultimamente perpendicolare alla tangente.

17. Nell'ellisse la distanza focale sega la curva secondo un angolo, di cui la tangente è media proporzionale tra le tangenti degli angoli secondo i quali il diametro corrispondente e la parallela all'asse trasverso condotta pel punto segano la curva.

18. Se una curva è riferita ad assi inclinati tra loro sotto un angolo α, dimostrare che il raggio di curvatura è

$$\frac{\left\{1 + 2\cos\alpha\,\dfrac{dy}{dx} + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{-\operatorname{sen}\alpha\,\dfrac{d^2y}{dx^2}}\,.$$

19. L'equazione di una parabola riferita a due tangenti qualunque essendo $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{1}{2}} = 1$, mostrare che il raggio di curvatura è $\frac{2}{ab \operatorname{sen} \alpha} \{ax - 2 \cos\alpha \sqrt{(abxy)} + by\}^{\frac{3}{2}}$, in cui α è l'inclinazione delle tangenti; e quindi trovare le coordinate del vertice ammettendo che la curvatura è un massimo in quel punto.

20. Se una curva passa per l'origine e tocca l'asse delle y, il diametro del circolo di curvatura è eguale al limite di $\frac{y^2}{x}$; se essa tocca l'asse delle x il diametro è eguale al limite di $\frac{x^2}{y}$.

21. Se una curva passa per l'origine con un'inclinazione α all'asse delle x, mostrare che il diametro di curvatura nell'origine è il limite di $\frac{x^2 + y^2}{x \operatorname{sen} \alpha - y \cos \alpha}$. Quindi, mostrare che il raggio di curvatura nell'origine per la curva

$$y^2 + 2ay - 2ax = 0 \text{ è } 2\sqrt{2a}.$$

22. Se φ è l'angolo tra la tangente ed il raggio vettore di una curva polare, dimostrare che il raggio di curvatura è $\frac{r \operatorname{cosec} \varphi}{1 + \frac{d\varphi}{d\theta}}$.

23. Le equazioni di un'epicicloide essendo

$$x = a\,(2 \cos\theta - \cos 2\theta),$$
$$y = a\,(2 \operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen} 2\theta),$$

trovare ρ, e mostrare che l'evoluta è un'epicicloide nella quale il raggio di ciascun circolo è $\frac{a}{3}$.

24. Nella curva $y = x^4 - 4x^3 - 18x^2$, trovare la natura della curva nei punti $x = 3, -1$, e $\frac{3}{2}(1 \pm \sqrt{5})$.

25. Mostrare che la curva $y = e^{-x^2}$ ha punti d'inflessione quando $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$...

26. In ogni curva l'equazione $\frac{d\varphi}{d\theta} + 1 = 0$ ha luogo in un punto d'inflessione, θ e φ essendo gli angoli che il primo raggio e la tangente fanno rispettivamente col raggio vettore.

27. È $\frac{dr}{d\theta}$ necessariamente della forma $\frac{0}{0}$ in un punto multiplo?

28. Se (α, β) è un punto della curva $\varphi(x, y) = 0$, pel quale passano n tangenti, il luogo di tutte le tangenti in quel punto è espresso da

$$\left\{(x-\alpha)\frac{d}{d\alpha} + (y-\beta)\frac{d}{d\beta}\right\}^n \varphi(\alpha, \beta) = 0.$$

29. Trovare i punti singolari nelle curve

$$4(x^2 + y^2) = 1 + 3y^{\frac{2}{3}},$$

ed $$y^2 - 2xy + 2x^2 - x^3 = 0.$$

30. Trovare la natura della curva

$$y + 1 = 2x - x^2 \pm (2-x)^{\frac{5}{2}}$$

nel punto $x = 2$.

31. Determinare il punto d'inflessione nella curva

$$y = x^3 - 9x^2 + 24x - 16.$$

32. Dal polo della curva $r = Aa^\theta$ si tirano le perpendicolari sulle tangenti; per i punti d'intersezione delle perpendicolari con le tangenti, si tirano le rette parallele ai raggi vettori; mostrare che l'equazione del luogo delle intersezioni ultime di tutte queste linee è

$$r = A \cos\alpha\, a^{\theta+\alpha},$$

in cui $$\cot\alpha = \log a.$$

33. Se i raggi vettori di una spirale equiangola sono diametri di una serie di circoli, il luogo delle intersezioni ultime dei circoli sarà una spirale simile.

34. Se un semicircolo rotola lungo una linea retta, la curva alla quale il suo diametro è sempre tangente è una cicloide.

35. Se una cicloide rotola lungo una linea retta, l'equazione della curva toccata dalla sua base è

$$\frac{x}{2a} = \left\{2 + \left(\frac{y}{2a}\right)^{\frac{2}{3}}\right\}\left\{1 - \left(\frac{y}{2a}\right)^{\frac{2}{3}}\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

36. Una serie di circoli è descritta che hanno i loro centri sopra un'iperbole equilatera e passano per il suo centro, mostrare che il luogo delle loro intersezioni ultime sarà una lemniscata.

37. Esaminare la natura delle seguenti curve nell'origine:

$$y^4 + 2ay^2x + x^4 - 2ax^3 = 0,$$

$$y^4 - \frac{x^5}{a} + x^4 + 3x^2y^2 = 0,$$

$$y^4 - 4xy(ay - bx) - x^4 = 0,$$

$$y^5 + x^5 = 2a^2x^2y.$$

38. Tracciare la curva $x^2y^2 + (x^2 - a^2)(x^2 - b^2) = 0$, e mostrare che la larghezza di ciascuna porzione chiusa è due volte tanto grande nella direzione delle y che in quella delle x. Dimostrare ancora che quando b si avvicina ad a come limite, ciascuna di queste porzioni è ultimamente simile ad un'ellisse.

39. Descrivere la curva $(x^2 - a^2)^2 + (y^2 - b^2)^2 = a^4$. Mostrare che quando $b = a$ essa si riduce a due ellissi.

40. Se una sezione conica di cui il fuoco è al polo di una data curva ha con la curva un contatto di secondo ordine nel punto (u, θ) l'equazione della sezione conica sarà

$$u' + \cos^2(\theta' - \theta)\frac{d}{d\theta}\left\{\frac{\frac{du}{d\theta}}{\cos(\theta' - \theta)}\right\} = u + \frac{d^2u}{d\theta^2}.$$

41. Una curva data rotola sopra una linea retta, spiegare il metodo per trovare il luogo del centro di curvatura nel punto di contatto della curva e della linea retta.

Se la curva che rotola è una spirale equiangola il luogo richiesto sarà una linea retta; se una cicloide un circolo; se una catenaria una parabola.

42. Triangoli rettangoli sono iscritti in un circolo; se uno dei lati che comprendono l'angolo retto passa per un punto fisso, trovare la curva alla quale l'altro è sempre tangente.

Risultato. $c^2(x^2+y^2)=(a^2+b^2-c^2-ax-by)^2$,

in cui a e b sono le coordinate del centro del dato circolo e c il suo raggio, il punto fisso essendo l'origine.

43. Determinare l'equazione dell'inviluppo di tutte le iperboli equilatere che hanno il centro comune e segano ad angoli retti una stessa linea retta.

Risultato. $x^2+3(axy)^{\frac{2}{3}}-y^2+a^2=0$,

in cui $x=a$ rappresenta la data linea retta.

44. Trovare l'inviluppo dell'asse di una parabola che ha una corda focale data in posizione e grandezza.

Risultato. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=c^{\frac{2}{3}}$; l'origine essendo il punto medio della data corda, ed uno degli assi coincidendo con quella corda.

45. Un sistema di ellissi è descritto in modo che ciascuna ellisse tocchi due assi rettangolari, ai quali i suoi assi siano paralleli, e che il rettangolo degli assi dell'ellisse sia una costante; dimostrare che ciascuna ellisse è toccata da due iperboli rettangolari, in cui il rettangolo degli assi trasversi è eguale al rettangolo degli assi di ciascuna ellisse.

46. A, B, sono i centri di due circoli eguali, ed AP, BQ, sono due raggi sempre perpendicolari tra loro; trovare la curva che è sempre toccata dalla linea retta PQ, e spiegare il risultato quando

$$AB^2=2\cdot AP^2.$$

47. Descrivere le seguenti curve:

$$x^3-xy^2+ay^2=0,$$

$$y^3-7yx^2+6x^3-a^3=0,$$

$$y^4+x^2y^2-a^2x^2=0,$$

$$a\,(x^3 + 7x^2y + 7xy^2 + y^3) - x^2y^2 = 0,$$

$$xy^2 + ax^2 - a^3 = 0,$$

$$y^2\,(x - 2a) - x^3 + a^3 = 0,$$

$$y^5 - ax^3y - bxy^3 + x^5 = 0,$$

$$y^5 - 5ax^2y^2 + x^5 = 0,$$

$$y = \frac{x^2}{a} \pm (x - a)\,\frac{\sqrt{(x^2 - b^2)}}{a},$$

$$y^2\,(a + x) = x^2\,(a - x),$$

$$y = xe^{-x},$$

$$y = e^{-x}\,\sqrt{(x^2 - 1)},$$

$$e^{\left(\frac{y}{a}\right)^2} = \operatorname{sen}\frac{x}{a},$$

$$y = e^{\cos x},$$

$$r^2 \operatorname{sen}\theta = a^2 \cos 2\theta,$$

$$r\,(\theta - \pi)^2 = a\left(\theta^2 - \frac{\pi}{4}\right).$$

48. S ed H sono due punti fissi, ed una curva è descritta in modo che, se P è un suo punto qualunque il rettangolo di SP ed HP è costante; mostrare che le linee rette condotte da S ad angoli retti sopra SP e da H ad angoli retti sopra HP incontrano la tangente in P in punti equidistanti da P.

49. Se $f\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}\right)$ è una funzione omogenea razionale di $\frac{x}{a}$, $\frac{y}{b}$ di n dimensioni, mostrare che l'inviluppo delle curve rappresentate dall'equazione $f\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}\right) = 1$, sotto la condizione $ab =$ costante, consiste in generale di n iperboli rettangolari che hanno gli assi per asintoti.

50. Se un quadrilatero $ABCD$ muta la sua forma, i suoi lati rimanendo costanti, dimostrare che le variazioni degli angoli A, B, C, D sono ultimamente nello stesso rapporto delle aree dei triangoli BCD, CDA, DAB, ABC.

51. Nell' Art. 274, se $p = n - 1$, abbiamo approssimativamente quando x ed y sono molto grandi

$$\frac{y}{x} = \mu_1 + \frac{b}{x}, \text{ in cui } b = -\frac{\psi(\mu_1)}{\varphi'(\mu_1)};$$

mostrare che se $q = n - 2$, abbiamo continuando l'approssimazione

$$\frac{y}{x} = \mu_1 + \frac{b}{x} - \frac{2\chi(\mu_1) + 2b\psi'(\mu_1) + b^2\varphi''(\mu_1)}{2x^2\varphi'(\mu_1)} + \ldots$$

Quindi mostrare che in generale le due estremità dell'asintoto rettilineo sono in parti opposte della curva.

52. Nell' Art. 275, se $p = n - 1$, abbiamo approssimativamente quando x ed y sono molto grandi

$$\frac{y}{x} = \mu_1 + \left(\frac{A}{x}\right)^{\frac{1}{2}}, \text{ in cui } A = -\frac{2\psi(\mu_1)}{\varphi''(\mu_1)};$$

mostrare che se $q = n - 2$, abbiamo continuando l'approssimazione

$$\frac{y}{x} = \mu_1 + \left(\frac{A}{x}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x^{\frac{3}{2}}} + \ldots$$

in cui
$$B = -\frac{\psi'(\mu_1)}{\varphi''(\mu_1)} - \frac{\varphi'''(\mu_1)A}{6\varphi''(\mu_1)},$$

$$C = -\frac{\chi(\mu_1) + \frac{A}{2}\psi''(\mu_1) + \left\{\psi'(\mu_1) + \frac{A}{2}\varphi'''(\mu_1) + \frac{B}{2}\varphi''(\mu_1)\right\}B}{A^{\frac{1}{2}}\varphi''(\mu_1)}$$

AGGIUNTE

AL

CALCOLO DIFFERENZIALE.

AGGIUNTE.

CAPITOLO I.

PRINCIPII DELLA TEORIA DELLE LINEE A DOPPIA CURVATURA.

1. Una linea è determinata nello spazio per mezzo di due equazioni tra le coordinate x, y, z che esprimono le distanze di un punto preso sulla linea da tre piani fissi, perpendicolari tra loro; e reciprocamente, il sistema di due simili equazioni può essere rappresentato da una linea tracciata nello spazio, di cui x, y, z dinoterebbero le coordinate rettangolari. La linea è ancora rappresentata graficamente dalle due curve piane che sono le sue proiezioni sopra due dei piani coordinati, come quelli delle xy e delle xz. Le equazioni delle proiezioni sono quelle che si otterrebbero eliminando alternativamente z ed y tra le equazioni

$$f(x, y, z) = 0, \quad F(x, y, z) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

per mezzo delle quali la linea è determinata nello spazio.

Si può considerare questa linea come l'intersezione di due superficie cilindriche che avrebbero rispettivamente per basi le proiezioni sui piani delle xy e delle xz, e di cui le rette generatrici sarebbero rispettivamente parallele agli assi delle z e delle y. In generale, le linee così determinate nello spazio non sono piane; esse si dicono *linee a doppia curvatura*, denominazione che sarà spiegata in seguito.

In virtù delle due equazioni della curva, una sola delle tre variabili x, y, z può essere considerata come indipendente: le due altre, del pari che le loro derivate di tutti gli ordini, ne sono delle funzioni esplicite o implicite. Ma, per avere il vantaggio della simmetria delle formole, sarà utile di trattare x, y, z come tre funzioni di una stessa variabile indipendente t. Supponendo date tre equazioni tra x, y, z, t, se

Dinotando con α, β, γ gli angoli che la tangente alla curva fa con le parallele agli assi delle x, y, z, nel senso delle coordinate positive, si avrà ancora

$$\cos\alpha = \frac{\pm dx}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}, \quad \cos\beta = \frac{\pm dy}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}},$$

$$\cos\gamma = \frac{\pm dz}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}, \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

ovvero, a motivo di $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$,

$$\frac{dx}{\cos\alpha} = \frac{dy}{\cos\beta} = \frac{dz}{\cos\gamma} = \pm\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}.$$

S'intende per lunghezza dell'arco di una linea a doppia curvatura, il limite al quale si avvicina indefinitamente la lunghezza di una porzione di poligono storto, inscritta nell'arco e terminata alle sue due estremità, quando il numero dei lati aumenta indefinitamente ed ogni lato decresce indefinitamente. Secondo questa definizione, se s dinota la lunghezza dell'arco di una linea a doppia curvatura, misurata a partire da un punto preso arbitrariamente sulla linea, si ha

$$ds = \pm\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}, \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

secondo che l'arco cresce o decresce, e che il differenziale ds è positivo o negativo. Così possiamo scrivere

$$\cos\alpha = \pm\frac{dx}{ds}, \quad \cos\beta = \pm\frac{dy}{ds}, \quad \cos\gamma = \pm\frac{dz}{ds}.$$

3. S'intende per *piano tangente* di una linea nello spazio, ogni piano che contiene la tangente a questa linea: così, la linea ha in ogni punto un'infinità di piani tangenti.

Si ha ancora, in ogni punto, un'infinità di *normali* della curva o di rette perpendicolari alla tangente; il piano che le comprende tutte è il *piano normale* della curva nello stesso punto. Se si dinotano con x', y', z' le coordinate correnti del piano normale nel punto x, y, z, la sua equazione è, secondo i principii della geometria analitica, ed in virtù delle equazioni (2),

$$(x'-x)\,dx + (y'-y)\,dy + (z'-z)\,dz = 0. \ldots\ldots (5).$$

La differenziazione delle equazioni (1) dà

$$\frac{df}{dx}dx+\frac{df}{dy}dy+\frac{df}{dz}dz=0,$$

$$\frac{dF}{dx}dx+\frac{dF}{dy}dy+\frac{dF}{dz}dz=0,$$

d'onde si ricava, per mezzo delle equazioni (2) e (3),

$$\left.\begin{array}{l}\frac{df}{dx}(x'-x)+\frac{df}{dy}(y'-y)+\frac{df}{dz}(z'-z)=0,\\ \frac{dF}{dx}(x'-x)+\frac{dF}{dy}(y'-y)+\frac{dF}{dz}(z'-z)=0;\end{array}\right\}\ldots\ldots(6)$$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{df}{dx}\cos\alpha+\frac{df}{dy}\cos\beta+\frac{df}{dz}\cos\gamma=0,\\ \frac{dF}{dx}\cos\alpha+\frac{dF}{dy}\cos\beta+\frac{dF}{dz}\cos\gamma=0.\end{array}\right\}\ldots\ldots(7)$$

Si ponga, per brevità,

$$\frac{df}{dy}\cdot\frac{dF}{dz}-\frac{df}{dz}\cdot\frac{dF}{dy}=L,$$

$$\frac{df}{dz}\cdot\frac{dF}{dx}-\frac{df}{dx}\cdot\frac{dF}{dz}=M,$$

$$\frac{df}{dx}\cdot\frac{dF}{dy}-\frac{df}{dy}\cdot\frac{dF}{dx}=N:$$

le equazioni (7) daranno

$$\frac{\cos\alpha}{L}=\frac{\cos\beta}{M}=\frac{\cos\gamma}{N}=\pm\frac{1}{\sqrt{(L^2+M^2+N^2)}},$$

Le equazioni della tangente saranno anche, in virtù delle equazioni (6),

$$\frac{x'-x}{L}=\frac{y'-y}{M}=\frac{z'-z}{N},$$

e quella del piano normale diverrà

$$L(x'-x)+M(y'-y)+N(z'-z)=0.$$

4. Supponiamo che a partire dal punto (x, y, z), indicato dalla lettera m, si prenda sulla curva una serie di punti m_1, m_2, m_3, ..., molto vicini gli uni agli altri, e che si congiungano con corde in modo da formare un poligono storto, di cui il perimetro si avvicina tanto maggiormente a confondersi con la curva, quanto più i vertici sono ravvicinati. Due lati consecutivi mm_1, m_1m_2 determinano un piano che si sposta un poco nello spazio, continuando a passare pel punto m, quando i punti m_1, m_2 si avvicinano di più in più ad m, e che si sposta tanto meno quanto più i punti m, m_1, m_2, sono di già maggiormente ravvicinati. Questo piano tende in generale verso una posizione determinata che il calcolo assegnerà, quando si stabilirà l'equazione del piano trattando le distanze mm_1, m_1m_2 come quantità infinitamente piccole. Si dice allora che il piano è stato assoggettato a passare per tre punti infinitamente vicini: esso prende il nome di *piano osculatore* della curva nel punto m, per analogia col cerchio osculatore di una curva piana, che si può considerare come determinato dalla condizione di avere con la curva tre punti comuni, infinitamente vicini.

Se si dinotano con x', y', z' le coordinate correnti del piano osculatore nel punto (x, y, z), la sua equazione sarà della forma

$$X(x'-x)+Y(y'-y)+Z(z'-z)=0, \quad \ldots\ldots\ldots (8)$$

X, Y, Z indicando dei coefficienti ignoti che si debbono determinare. Questa equazione deve sussistere quando vi si rimpiazzano x, y, z con $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$, e così si ha

$$X\,dx+Y\,dy+Z\,dz=0;$$

infine queste due equazioni debbono ancora sussistere quando vi si rimpiazzano ad un tempo

$$x, y, z; \quad dx, dy, dz$$

con $\quad x+dx,\ y+dy,\ z+dz; \quad dx+d^2x,\ dy+d^2y,\ dz+d^2z,$

ciò che dà $\quad X\,d^2x+Y\,d^2y+Z\,d^2z=0.$

Allorchè si combinano queste tre equazioni in modo da eliminare due delle tre ignote X, Y, Z, la terza va via nello stesso tempo, e resta per equazione del piano osculatore

$$(dy\,d^2z-dz\,d^2y)(x'-x)+(dz\,d^2x-dx\,d^2z)(y'-y) \\ +(dx\,d^2y-dy\,d^2x)(z'-z)=0;$$

ma, per brevità di scrittura, si può conservare l'equazione del piano osculatore sotto la forma (8), ponendo le equazioni ausiliarie

$$X = dy\, d^2z - dz\, d^2y, \quad Y = dz\, d^2x - dx\, d^2z,$$
$$Z = dx\, d^2y - dy\, d^2x, \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (9).$$

5. Abbiamo trovato per l'equazione del piano normale nel punto (x, y, z),

$$(x' - x)\, dx + (y' - y)\, dy + (z' - z)\, dz = 0 \ \ldots\ldots\ (5)$$

Se si vuole avere l'equazione del piano normale condotto per un punto infinitamente vicino, bisogna aggiungere al primo membro dell'equazione precedente il suo differenziale rispetto a tutte le variabili. Per i punti situati sulla retta d'intersezione dei due piani normali infinitamente vicini, si ha dunque, oltre dell'equazione precedente, quella che se ne deduce con la differenziazione, cioè

$$(x' - x)\, d^2x + (y' - y)\, d^2y + (z' - z)\, d^2z - (dx^2 + dy^2 + dz^2) = 0,$$

ossia

$$(x' - x)\, d^2x + (y' - y)\, d^2y + (z' - z)\, d^2z - ds^2 = 0 \ldots\ldots\ (10).$$

Questa linea d'intersezione dei due piani normali incontra il piano osculatore in un punto (x', y', z'), di cui le coordinate debbono soddisfare alle tre equazioni (5), (10), (8). Questo punto è il centro di un cerchio che passa per tre punti della curva infinitamente vicini, o il centro del *cerchio osculatore*. In effetti, poichè nella determinazione geometrica del cerchio osculatore di una curva piana non entrano che due elementi consecutivi ed infinitamente piccoli della curva, e due elementi consecutivi di una curva qualunque sono compresi in uno stesso piano, o piuttosto determinano questo piano, che è il piano osculatore, la costruzione del cerchio osculatore si adatta alle curve qualunque, come alle curve piane. Se si pone

$$\rho^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2,$$

il raggio ρ del cerchio osculatore farà con le parallele agli assi delle x, y, z, gli angoli λ, μ, ν, dati dalle equazioni

$$\pm \rho \cos\lambda = x' - x, \quad \pm \rho \cos\mu = y' - y, \quad \pm \rho \cos\nu = z' - z.$$

La curvatura della linea, nel suo piano osculatore, ha per misura $\frac{1}{\rho}$; e l'angolo di *contingenza* $d\tau$, (cioè l'angolo esteriore delle due tangenti consecutive che determinano il piano osculatore) è legato a ρ dall'equazione

$$\frac{1}{\rho}=\frac{d\tau}{ds} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (11).$$

6. Le equazioni (5), (10), (8) danno immediatamente con l'eliminazione dei binomii $x'-x$, $y'-y$,

$$z'-z=\frac{ds^2(Xdy-Ydx)}{X^2+Y^2+Z^2};$$

da cui si deduce cambiando semplicemente le lettere,

$$y'-y=\frac{ds^2(Zdx-Xdz)}{X^2+Y^2+Z^2},$$

$$x'-x=\frac{ds^2(Ydz-Zdy)}{X^2+Y^2+Z^2};$$

indi viene

$$\rho=\pm\frac{ds^2\sqrt{[(X^2+Y^2+Z^2)ds^2-(Xdx+Ydy+Zdz)^2]}}{X^2+Y^2+Z^2}$$

o sia

$$\rho=\pm\frac{ds^3}{\sqrt{(X^2+Y^2+Z^2)}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

in virtù della relazione

$$Xdx+Ydy+Zdz=0.$$

Si troverà ancora

$$\begin{aligned} Xdy-Ydx &= d^2z\,(dx^2+dy^2)-dz\,(dx\,d^2x+dy\,d^2y) \\ &= d^2z\,(ds^2-dz^2)-dz\,(ds\,d^2s-dz\,d^2z) \\ &= d^2z\;ds^2-dz\,ds\,d^2s=ds^3\;d\cdot\frac{dz}{ds}, \end{aligned}$$

e similmente

$$Zdx-Xdz=ds^3\;d\cdot\frac{dy}{ds},\quad Ydz-Zdy=ds^3\;d\cdot\frac{dx}{ds},$$

onde

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = ds^4 \left\{ \left(d \cdot \frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d \cdot \frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d \cdot \frac{dz}{ds}\right)^2 \right\},$$

e quindi

$$x' - x = \rho^2 \frac{d \cdot \frac{dx}{ds}}{ds}, \quad y' - y = \rho^2 \frac{d \cdot \frac{dy}{ds}}{ds}, \quad z' - z = \rho^2 \frac{d \cdot \frac{dz}{ds}}{ds},$$

$$\rho = \pm \frac{ds}{\sqrt{\left\{ \left(d \cdot \frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d \cdot \frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d \cdot \frac{dz}{ds}\right)^2 \right\}}} \dots (13)$$

Finalmente la formola (11) dà pel valore dell' angolo di contingenza $d\tau$,

$$d\tau = \pm \sqrt{\left\{ \left(d \cdot \frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d \cdot \frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d \cdot \frac{dz}{ds}\right)^2 \right\}} \dots (14)$$

Osservando che $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ sono i coseni degli angoli α, β, γ che la tangente della curva nel punto (x, y, z) fa con gli assi delle coordinate, la formola (14) mostra che l' angolo infinitesimo $d\tau$ compreso tra quella tangente e la tangente infinitamente vicina si può esprimere con

$$d\tau = \pm \sqrt{\{(d \cdot \cos\alpha)^2 + (d \cdot \cos\beta)^2 + (d \cdot \cos\gamma)^2\}}.$$

7- Dinotiamo con λ', μ', ν' gli angoli che la normale al piano osculatore fa con gli assi delle x, delle y e delle z: avremo

$$\cos\lambda' = \pm \frac{X}{\sqrt{(X^2 + Y^2 + Z^2)}}, \quad \cos\mu' = \pm \frac{Y}{\sqrt{(X^2 + Y^2 + Z^2)}},$$

$$\cos\nu' = \pm \frac{Z}{\sqrt{(X^2 + Y^2 + Z^2)}}.$$

Dinotiamo inoltre con $d\theta$ l'angolo infinitamente piccolo che formano tra loro le normali ai due piani osculatori infinitamente vicini, di cui l' uno si riferisce al punto (x, y, z) e

l'altro al punto $(x+dx, y+dy, z+dz)$: si avrà, per l'osservazione fatta poco innanzi,

$$d\theta^2 = (d\cdot\cos\lambda')^2 + (d\cdot\cos\mu')^2 + (d\cdot\cos\nu')^2$$

$$= \frac{(X^2+Y^2+Z^2)(dX^2+dY^2+dZ^2)-(XdX+YdY+ZdZ)^2}{(X^2+Y^2+Z^2)^2}$$

$$= \frac{(XdY-YdX)^2+(ZdX-XdZ)^2+(YdZ-ZdY)^2}{(X^2+Y^2+Z^2)^2},$$

Si trova d'altronde

$$dX = dy\,d^3z - dz\,d^3y, \quad dY = dz\,d^3x - dx\,d^3z,$$

$$dZ = dx\,d^3y - dy\,d^3x,$$

$$\frac{XdY-YdX}{dz} = \frac{ZdX-XdZ}{dy} = \frac{YdZ-ZdY}{dx}$$

$$= dz(d^2x\,d^3y - d^2y\,d^3x) + dy(d^2z\,d^3x - d^2x\,d^3z)$$

$$+ dx(d^2y\,d^3z - d^2z\,d^3y),$$

e per conseguenza $\frac{d\theta}{ds} =$

$$\frac{dz(d^2xd^3y-d^2yd^3x)+dy(d^2zd^3x-d^2xd^3z)+dx(d^2y\,d^3z-d^2zd^3y)}{(dy\,d^2z-dz\,d^2y)^2+(dz\,d^2x-dx\,d^2z)^2+(dx\,d^2y-dy\,d^2x)^2}.$$

Ora, come l'espressione

$$\frac{d\tau}{ds} = \frac{1}{\rho},$$

in cui $d\tau$ dinota l'angolo di contingenza formato da due tangenti infinitamente vicine, misura la curvatura della linea nel suo piano osculatore, o la sua *prima curvatura*, così l'espressione

$$\frac{d\theta}{ds},$$

nella quale $d\theta$ dinota l'angolo di *flessione* formato da due piani osculatori consecutivi, misurerà la *seconda curvatura*

della linea; ciò che giustifica la denominazione di *linee a doppia curvatura*, data alle linee che non sono piane.

Per concepire la rettificazione di una linea a doppia curvatura, si può immaginare che il primo piano osculatore si abbassi sul secondo, che questi due si abbassino sul terzo, e così di seguito, in modo da trasformare la linea in curva piana; indi, che la prima tangente si abbassi sulla seconda, queste due sulla terza, e così di seguito, in modo da trasformare la curva piana in linea retta; senza che la lunghezza degli elementi della curva primitiva sia stata alterata in questa doppia operazione.

Dunque, con un' operazione in senso inverso o con due flessioni consecutive, si passerebbe dalla linea retta ad una curva tracciata nello spazio in un modo qualunque.

Si vede che l'espressione della seconda curvatura dipende dai differenziali di terzo ordine delle coordinate x, y, z; mentre quella della prima curvatura dipende solamente dai differenziali di primo e di secondo ordine.

8. Applichiamo le formole precedenti alla linea dinotata col nome di *elica*, la quale è tracciata sulla superficie di un cilindro retto a base circolare, in modo che la tangente alla curva formi un angolo costante con le generatrici del cilindro, o (ciò che torna lo stesso) in modo che la curva si muti in linea retta con lo sviluppo della superficie cilindrica sopra un piano. Siano R il raggio del cilindro di cui supponiamo che l'asse coincida con quello delle z; φ l'angolo compreso tra il piano delle xz e quello tra i piani condotti per l'asse nel quale si trova il punto (x, y, z) della curva; a la tangente trigonometrica dell'angolo costante formato dalla tangente alla curva con la generatrice del cilindro: la definizione dell'elica darà immediatamente

$$x = R\cos\varphi, \quad y = R\,\mathrm{sen}\,\varphi, \quad z = aR\varphi\,, \ldots\ldots (15)$$

facendo passare l'asse delle x pel punto in cui l'elica penetra il piano xy.

Le equazioni in coordinate rettangolari delle proiezioni della curva sopra i piani delle xz e delle yz, saranno

$$x = R\cos\frac{z}{aR}, \quad y = R\,\mathrm{sen}\frac{z}{aR}\,;$$

in quanto all'equazione della proiezione della curva sul piano xy, essa si confonde evidentemente con quella della traccia del cilindro

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Si avrebbe ancora l'equazione

$$\frac{y}{x} = \tan \frac{z}{aR},$$

che è quella della superficie generata da una retta la quale si moverebbe restando parallela al piano xy, in modo da appoggiarsi costantemente sull'elica e sull'asse del cilindro.

Si troverà per le equazioni della tangente

$$-\frac{x'-x}{\operatorname{sen}\varphi} = \frac{y'-y}{\cos\varphi} = \frac{z'-z}{a},$$

e per quella del piano normale

$$(x'-x)\operatorname{sen}\varphi - (y'-y)\cos\varphi - a(z'-z) = 0.$$

Se ne conchiude che il piano normale forma un angolo costante con quello delle xy, il che risulta d'altronde dalla definizione della curva.

Le coordinate x', y' del punto in cui la tangente dell'elica nel punto (x, y, z) penetra il piano xy, sono date dalle equazioni

$$x' - x = \frac{z}{a}\operatorname{sen}\varphi = R\varphi \operatorname{sen}\varphi, \quad y' - y = -\frac{z}{a}\cos\varphi = -R\varphi\cos\varphi,$$

onde $$(x'-x)^2 + (y'-y)^2 = R^2\varphi^2.$$

Sia A il punto dell'elica sul piano xy, ed m la proiezione su questo piano del punto (x, y, z) della curva; se μ è il punto d'incontro dello stesso piano con la tangente dell'elica, la retta $m\mu$ toccherà il cerchio, base del cilindro, in m; e risulta dall'equazione precedente che la porzione di retta $m\mu$ ha la stessa lunghezza dell'arco di cerchio Am. Dunque, se la tangente all'elica si muove toccando costantemente questa curva, il punto μ in cui essa penetra il piano xy descrive su questo piano una involuta del cerchio dato dall'intersezione del cilindro e del piano: e l'involuta ha il suo regresso nel punto in cui il piano è penetrato dall'elica.

Prendendo l'angolo φ per variabile indipendente, le formole (15) daranno

$$dx = -R\,\mathrm{sen}\,\varphi\,d\varphi,\quad dy = R\cos\varphi\,d\varphi,\quad dz = aR\,d\varphi;$$

$$d^2x = -R\cos\varphi\,d\varphi^2,\quad d^2y = -R\,\mathrm{sen}\,\varphi\,d\varphi^2,\quad d^2z = 0;$$

$$d^3x = R\,\mathrm{sen}\,\varphi\,d\varphi^3,\quad d^3y = -R\cos\varphi\,d\varphi^3,\quad d^3z = 0.$$

Dinotiamo inoltre con i l'angolo costante di cui la tangente è a: verrà

$$ds = \frac{R}{\cos i}\,d\varphi,\quad d^2s = 0;$$

e quindi si avrà per la misura della prima curvatura

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\cos^2 i}{R},$$

e per la misura della seconda curvatura,

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{\mathrm{sen}\,i\cos i}{R}.$$

L'equazione del piano osculatore diviene

$$\tan i\,[(x'-x)\,\mathrm{sen}\,\varphi - (y'-y)\cos\varphi] + z' - z = 0,$$

o più semplicemente, per le equazioni (15),

$$z' - z = a\,(y'\cos\varphi - x'\,\mathrm{sen}\,\varphi);$$

e si riconosce che esso ha un'inclinazione costante sul piano delle xy.

CAPITOLO II.

PRINCIPII DELLA TEORIA DELLE SUPERFICIE CURVE.

Piano tangente, e retta normale di una superficie.

9. Essendo data l'equazione di una superficie riferita alle coordinate rettilinee x, y, z, che (per maggiore semplicità) supponiamo rettangolari, due delle variabili, come x, y, possono considerarsi indipendenti; e la terza variabile z, funzione delle due prime, ammette due derivate parziali del primo ordine p, q, in modo che si ha per espressione del suo differenziale totale

$$dz = pdx + qdy,$$

gli accrescimenti infinitamente piccoli dx, dy restando indipendenti l'uno dall'altro.

Ma supponendo che si sia tracciata sulla superficie una linea qualunque che passa pel punto (x, y, z), vi sarà per i punti situati su questa linea una dipendenza tra y ed x, e per conseguenza tra dy e dx, in modo che si potrà porre

$$dy = y_1\, dx, \quad dz = (p + qy_1)\, dx,$$

y_1 dinotando una funzione di x, determinata in virtù della descrizione della curva.

Chiamiamo x', y', z' le coordinate correnti della tangente alla curva di cui si tratta, condotta nel punto (x, y, z): le equazioni di questa tangente saranno (Art. 2)

$$y' - y = y_1\,(x' - x), \quad z' - z = (p + qy_1)\,(x' - x) \ldots\ldots (1)$$

Se dunque si elimina tra esse y_1, l'equazione risultante apparterrà alla superficie sulla quale si trovano tutte le tangenti che si possono condurre, pel punto (x, y, z), alle curve qualunque tracciate sulla superficie data. L'eliminazione dà

$$z' - z = p\,(x' - x) + q\,(y' - y), \ldots\ldots\ldots (2)$$

equazione di un piano che avrebbe x', y', z' per coordinate correnti, ed al quale si dà il nome di *piano tangente*, poichè esso è il luogo di tutte le tangenti delle curve tracciate sulla superficie, e che passano pel punto di contatto.

Il piano tangente può non avere che un punto di comune con la superficie, il che è una proprietà delle superficie convesse in tutti i loro punti, come quelle della sfera e dell'ellissoide. Ma più generalmente questo piano può intersegare la superficie, ed anche segarla secondo una linea che passa pel punto di contatto, ciò che non impedisce che esso sia il luogo delle tangenti a tutte le curve tracciate per quel punto sulla superficie. Questa linea d'intersezione separa sulla superficie le linee che si elevano al di sopra del piano tangente da quelle che si abbassano al di sotto dello stesso piano.

10. Sia $F(x, y, z) = 0$ l'equazione della superficie, ed esprimiamo le derivate p, q per mezzo delle derivate parziali della funzione F: l'equazione del piano tangente diverrà

$$(x'-x)\frac{dF}{dx} + (y'-y)\frac{dF}{dy} + (z'-z)\frac{dF}{dz} = 0;$$

vale a dire che essa si deduce da $dF = 0$, rimpiazzando i differenziali dx, dy, dz con le differenze $x'-x, y'-y, z'-z$.

La retta condotta pel punto di contatto, perpendicolarmente al piano tangente, è la *normale* della superficie, ed i piani che passano per la normale si chiamano *piani normali*. L'intersezione della superficie con uno qualunque dei suoi piani normali è qualificata come *sezione normale*, e, per opposizione, le altre sezioni piane della superficie si dicono *sezioni oblique*.

Le due equazioni della normale si ricavano dalla formola

$$\frac{x'-x}{\frac{dF}{dx}} = \frac{y'-y}{\frac{dF}{dy}} = \frac{z'-z}{\frac{dF}{dz}},$$

o

$$\frac{x'-x}{p} = \frac{y'-y}{q} = -(z'-z) \dots\dots\dots\dots (2).$$

Siano λ, μ, ν gli angoli della normale con le parallele agli assi delle x, y, z, questi angoli essendo misurati dalla parte delle coordinate positive, e poniamo

$$R = \pm\sqrt{\left\{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dE}{dz}\right)^2\right\}}:$$

avremo

$$\cos\lambda = \frac{1}{R}\cdot\frac{dF}{dx},\ \cos\mu = \frac{1}{R}\cdot\frac{dF}{dy},\ \cos\nu = \frac{1}{R}\cdot\frac{dF}{dz},$$

o pure

$$\cos\lambda = \frac{\pm p}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}},\ \cos\mu = \frac{\pm q}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}},$$

$$\cos\nu = \frac{\mp 1}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}} \ \ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Le lettere λ, μ, ν dinotano ancora gli angoli del piano tangente con quelli delle yz, delle xz e delle xy.

Sia $$dF = Xdx + Ydy + Zdz = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

l'equazione differenziale comune ad una serie di superficie

$$F(x, y, z) = a, \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

le quali non differiscono che pel valore del parametro a: le equazioni della normale potranno scriversi sotto la forma

$$Y(x'-x) - X(y'-y) = 0, \quad Z(x'-x) - X(z'-z) = 0;$$

e saranno queste le equazioni delle rette che toccano nel punto (x, y, z) delle linee tracciate nello spazio, le quali hanno la proprietà di soddisfare alle equazioni differenziali

$$Y - X\frac{dy}{dx} = 0, \quad Z - X\frac{dz}{dx} = 0.$$

Dunque queste linee hanno anche la proprietà d'incontrare sotto l'incidenza normale tutte le superficie rappresentate dall'equazione (5) o (4).

Caratteri analitici delle principali famiglie di superficie.

11. Si sa che ogni legame matematico tra le variabili x, y, z, dinotato in generale con

$$F(x, y, z) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

dà luogo alla costruzione di una superficie, quando si considerano x, y, z come le tre coordinate che fissano la posizione di un punto nello spazio. Ma in generale la superficie così costruita non sarebbe definita geometricamente; e vo-

lendo, non già figurare nell'estensione i concetti dell'analisi, ma applicare l'analisi alla teoria dell'estensione, non avremo realmente a considerare che le superficie caratterizzate da proprietà geometriche.

Può accadere che la definizione geometrica di una superficie si traduca immediatamente con una equazione tra le sue coordinate correnti; così l'equazione.

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

esprime immediatamente quel carattere geometrico col quale si può definire la superficie di una sfera: vale a dire, che tutti i suoi punti sono ad una distanza costante da un altro punto preso quì per origine delle coordinate. Ma, più ordinariamente, la definizione geometrica di una superficie consiste ad assegnare la legge della descrizione della superficie per mezzo di una linea: sia che la linea si muova semplicemente nello spazio senza cambiare di forma, sia che essa muti forma nello stesso tempo che si sposta. In questo caso, l'equazione (6) si riguarda come data dall'eliminazione del parametro α tra le equazioni

$$f(x, y, z, \alpha) = 0, \quad F(x, y, z, \alpha) = 0, \ldots\ldots. (7)$$

che sono quelle di una linea tracciata nello spazio: questa linea, alla quale si dà il nome di *generatrice*, variando continuamente, o di posizione e di forma, o almeno di posizione, col parametro α.

Si dice ancora che la superficie (6) è il luogo geometrico di tutte le linee che dà il sistema delle equazioni (7), quando vi si fa variare in modo continuo il parametro α.

Così, il cono retto che si considera negli elementi di geometria è la superficie descritta da una retta che si muove passando costantemente per un punto fisso, e facendo con un'altra retta condotta per lo stesso punto un angolo costante. Si potrebbe ancora considerare la superficie del cono come descritta da un cerchio di raggio variabile, di cui il centro si muove sull'asse del cono mentre il suo piano resta perpendicolare a quest'asse, e di cui il raggio è proporzionale alla distanza del vertice del cono dal centro del cerchio mobile.

12. Ciò conduce alla distribuzione delle superficie in famiglie, secondo le analogie geometriche dei loro modi di de-

scrizione; distribuzione che non bisogna confondere con la classificazione delle superficie algebriche secondo il grado delle loro equazioni. Per esempio, il cono retto, di cui si è parlato or ora, appartiene alla famiglia delle superficie *coniche*, che hanno per carattere generico di essere descritte da una retta assoggettata a passare costantemente per un punto fisso. Similmente il cilindro retto, che si considera negli elementi di geometria, appartiene alla famiglia delle superficie *cilindriche*, generate da una retta che si muove restando costantemente parallela a sè stessa. Per dirigere, nell'uno e nell'altro caso, il movimento della retta generatrice, nulla impedisce di sostituire al cerchio che dà il cilindro ed il cono ordinario, una curva qualunque. In generale, si chiamano linee *direttrici* quelle sulle quali si appoggia la linea generatrice per descrivere una superficie determinata.

La distribuzione delle superficie in famiglie differisce da una classificazione propriamente detta in questo senso che la stessa superficie può appartenere a diverse famiglie, secondo le analogie diverse che il suo modo di descrizione manifesta. Così, si possono ancora considerare il cono ed il cilindro ordinarii come appartenenti alla famiglia delle superficie di *rotazione*, che hanno per carattere generico di essere descritte da una linea piana, che si dice *linea meridiana*, la quale gira intorno ad un asse fisso compreso nel piano della meridiana, o nel piano *meridiano*. La linea meridiana si riduce ad una retta, parallela o obbliqua all'asse di rotazione, nel caso del cilindro o del cono retto, ma essa può essere una curva tracciata arbitrariamente nel piano meridiano.

Si chiamano superficie *rigate* tutte quelle che può descrivere una retta movendosi nello spazio in un modo qualunque. S'invertirà questa definizione dicendo che, per un punto qualunque preso sopra una superficie rigata, si può tirare una retta che si applica in tutti i suoi punti sulla superficie. La classe delle superficie rigate comprende l'ordine delle superficie *storte*, per le quali due generatrici infinitamente vicine non s'incontrano, e l'ordine delle superficie *sviluppabili*, per le quali avviene il contrario, o sia in cui le rette generatrici hanno un inviluppo, che dicesi *spigolo di regresso* della superficie sviluppabile. Il piano tangente in un punto di una superficie rigata, comprende la generatrice condotta per quel punto, però in una superficie storta quel

piano sega la superficie in ogni altro punto della retta generatrice, mentre in una superficie sviluppabile esso è tangente della superficie lungo tutta la retta generatrice. Le superficie sviluppabili prendono questo nome per la proprietà che esse hanno di potersi svolgere o adattare sopra un piano senza lacerazione o duplicatura, o senza che una linea qualunque, tracciata sulla superficie, sia raccorciata o allungata in alcuno dei suoi elementi.

In ciò che segue parleremo solamente delle superficie cilindriche, delle coniche, di una famiglia particolare di superficie storte, e delle superficie di rotazione.

13. *Famiglia delle superficie cilindriche.* Mettiamo le equazioni della retta generatrice sotto la forma

$$x = az + \alpha, \quad y = bz + \beta; \dots\dots\dots\dots (8)$$

affinchè questa retta mantenendosi sempre parallela alla direzione $x=az$, $y=bz$, possa descrivere una superficie, dovrà aversi tra i parametri variabili α, β, un legame

$$\beta = \varphi(\alpha),$$

d'onde

$$y - bz = \varphi(x - az). \dots\dots\dots\dots (9).$$

Finchè i coefficienti a, b e la funzione φ conservano la loro indeterminazione, l'equazione (9) conviene ad una superficie cilindrica qualunque.

Prendendo le derivate dell'equazione (9) rispetto a ciascuna delle variabili indipendenti x, y, si avrà

$$-bp = \varphi'(x - az)(1 - ap), \quad 1 - bq = -\varphi'(x - az)\, aq,$$

da cui, eliminando la funzione derivata φ', si deduce l'equazione alle differenze parziali

$$ap + bq = 1 \dots\dots\dots\dots (10).$$

Pel significato geometrico delle derivate p, q, l'equazione (10) esprime che il piano tangente è sempre parallelo alla retta $x=az$, $y=bz$; e si potrebbe partire da questa proprietà del piano tangente delle superficie cilindriche, per stabilire direttamente l'equazione (10).

Per determinare la funzione arbitraria φ che entra nell'equazione (9), si può assoggettare la superficie a passare per una curva *direttrice* data. Siano

$$f(x, y, z) = 0, \quad F(x, y, z) = 0, \dots\dots\dots (11)$$

le equazioni della direttrice: si elimineranno x, y, z tra le equazioni (8) ed (11), e verrà per risultante un'equazione della forma

$$\Phi(\alpha, \beta) = 0$$

che deve essere identica con l'altra $\beta = \varphi(\alpha)$, e che determina per conseguenza la funzione φ. D'altronde, se si rimettono nell'equazione precedente per α e β i loro valori in x, y, z, verrà

$$\Phi(x - az, y - bz) = 0, \ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

e questa sarà l'equazione della superficie cilindrica richiesta.

Se la superficie cilindrica deve essere tangente ad una superficie definita dall'equazione $f = 0$, come nel problema delle ombre allorchè il punto luminoso si allontana all'infinito, si ricaveranno da f i valori di p, q in x, y, z, e si sostituiranno nell'equazione (10), ciò che darà una seconda equazione $F = 0$ appartenente alla linea di contatto del cilindro con la superficie data. Prendendo questa linea di contatto per direttrice, si completerà la soluzione del problema come precedentemente.

14. *Famiglia delle superficie coniche.* Le equazioni della retta mobile che descrive una superficie conica passando costantemente pel punto (x_0, y_0, z_0), si possono mettere sotto la forma

$$x - x_0 = \alpha(y - y_0), \quad z - z_0 = \beta(x - x_0) \ldots . (13).$$

Si debbono supporre i parametri α e β legati da un'equazione quale $\beta = \varphi(\alpha)$, ed allora viene

$$\frac{z - z_0}{x - x_0} = \varphi\left(\frac{x - x_0}{y - y_0}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots (14)$$

Finchè le costanti x_0, y_0, z_0 ed il segno φ conservano la loro indeterminazione, questa equazione è atta a rappresentare una superficie conica qualunque. Si elimina la caratteristica φ col procedimento ordinario (prendendo le derivate parziali dell'equazione (14) rispetto ad x ed y), e si perviene all'equazione alle differenze parziali

$$z - z_0 = p(x - x_0) + q(y - y_0) \ldots\ldots\ldots (15).$$

Si perviene ancora direttamente a questa equazione, considerando che il piano tangente alla superficie conica deve sempre passare pel punto (x_0, y_0, z_0), centro della superficie.

Allorchè si prende questo centro per origine delle coordinate, l'equazione (14) si riduce a

$$\frac{z}{x} = \varphi\left(\frac{x}{y}\right) = \psi\left(\frac{y}{x}\right),$$

ed, a motivo di questa forma, essa è omogenea per rapporto alle variabili x, y, z. Nelle stesse circostanze, l'equazione (15) diviene

$$z = px + qy,$$

il che si accorda col teorema delle funzioni omogenee.

Se la superficie conica ha per curva direttrice la linea determinata da $f = 0$ ed $F = 0$, si elimineranno x, y, z tra queste equazioni e le (13), ciò che condurrà ad un'equazione finale $\Phi = 0$, la quale determina implicitamente la funzione φ. Rimettendo per α, β i loro valori in x, y, z, si avrà per l'equazione della superficie conica

$$\Phi\left(\frac{x - x_0}{y - y_0},\ \frac{z - z_0}{x - x_0}\right) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ (16)$$

Nel caso in cui la funzione F non fosse data direttamente, ma dovesse essere determinata con la condizione che la superficie conica toccasse la superficie $f = 0$, caso che si presenta nel problema delle ombre allorchè il punto luminoso è ad una distanza finita dal corpo opaco, si ricaverebbero dall'equazione $f = 0$ i valori di p, q in x, y, z; sostituendoli nell'equazione (15) si otterrebbe l'equazione $F = 0$.

15. *Famiglia delle superficie conoidi.* Allorchè la generatrice di una superficie rigata è assoggettata alla doppia condizione di avere una direttrice rettilinea e di restare parallela ad un piano direttore, la superficie descritta si dice un *conoide*, il quale è *retto* quando la retta direttrice è perpendicolare al piano direttore. È facile vedere che le superficie conoidi (ad eccezione del piano che vi si trova compreso) sono superficie storte.

Prendiamo per piano direttore quello delle xy, e per origine il punto in cui la retta direttrice incontra il piano: le equazioni della direttrice saranno

$$x = az, \quad y = bz, \ldots\ldots\ldots\ldots\ (17)$$

e quelle della generatrice

$$z = \beta, \quad y - b\beta = \alpha(x - a\beta).$$

Si deve sempre supporre l'esistenza del legame $\beta = \varphi(\alpha)$ tra i parametri α, β; ciò che dà per l'equazione generale delle superficie conoidi

$$z = \varphi\left(\frac{y - bz}{x - az}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (18)$$

Se ne ricava, eliminando nel modo ordinario la caratteristica φ,

$$p(x - az) + q(y - bz) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (19)$$

Questa equazione esprime che, se si tira nel piano tangente al punto (x, y, z) una retta parallela al piano xy, essa incontrerà la direttrice (17); ed in effetto la retta condotta così nel piano tangente si confonde con una generatrice.

16. *Famiglia delle superficie di rotazione.* Tra le superficie alle quali non si assegna per carattere distintivo di essere descritte dal movimento di una retta, non considereremo qui che la famiglia delle superficie di rotazione. Siano

$$x - x_0 = a(z - z_0), \quad y - y_0 = b(z - z_0)$$

le equazioni dell'asse di rotazione, condotto pel punto (x_0, y_0, z_0): un piano perpendicolare a quest'asse ha per equazione

$$ax + by + z = \alpha,$$

e questo piano sega la superficie di rotazione secondo un cerchio che si può considerare come l'intersezione del piano e di una sfera che avrebbe il suo centro nel punto (x_0, y_0, z_0). L'equazione di questa sfera è

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = \beta,$$

ed il legame $\beta = \varphi(\alpha)$, che dipende nella sua forma dalla curva meridiana, dà

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = \varphi(ax + by + z) \ldots (20)$$

equazione atta a rappresentare una superficie qualunque di rotazione, finchè le costanti x_0, y_0, z_0, a, b, e la caratteristica φ conservano la loro indeterminazione.

Prendendo le derivate parziali rispetto ad x e ad y, si ha

$$2[x - x_0 + p(z - z_0)] = (a + p)\varphi'(ax + by + z),$$

$$2[y - y_0 + q(z - z_0)] = (b + q)\varphi'(ax + by + z);$$

d'onde si conchiude con l'eliminazione di φ,

$$p\,[y - y_0 - b\,(z - z_0)] - q\,[x - x_0 - a\,(z - z_0)] \\ = b\,(x - x_0) - a\,(y - y_0) \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (21)$$

Quest'ultima equazione esprime che la normale alla superficie incontra l'asse di rotazione. Infatti dinotiamo con x', y', z' le coordinate correnti della normale nel punto (x, y, z); le equazioni di questa normale saranno

$$x' - x + p\,(z' - z) = 0 \quad y' - y + q\,(z' - z) = 0\,;$$

quelle dell'asse di rotazione, riferite alle stesse coordinate correnti, diverranno

$$x' - x_0 = a\,(z' - z_0), \quad y' - y_0 = b\,(z' - z_0)\,;$$

se si eliminano x', y', z' da queste quattro equazioni, si ricade sull'equazione (21).

Allorchè si prende l'asse di rotazione per quello delle z, ciò che corrisponde a fare $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $a = 0$, $b = 0$, l'equazione (21) si riduce a

$$py - qx = 0,$$

e l'equazione (20) diviene

$$x^2 + y^2 + (z - z_0)^2 = \varphi(z),$$

o, ciò che vale lo stesso, per l'indeterminazione della funzione φ,

$$x^2 + y^2 = \varphi(z), \text{ o pure } z = \psi(x^2 + y^2).$$

z è allora l'ordinata della curva meridiana, di cui $\sqrt{(x^2 + y^2)}$ dinota l'ascissa.

Si assoggetterà la superficie di rotazione a passare per una curva $f = 0$, $F = 0$, per mezzo del procedimento di eliminazione già indicato per le superficie cilindriche e coniche.

Delle superficie inviluppi.

17. La teoria delle curve inviluppi si generalizza e si estende ancora alle superficie.

Sia $$F(x, y, z, \alpha) = 0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (22)$$

l'equazione di una superficie curva, nella quale entra il parametro α. Assegnando una serie di valori a questo parametro, si ha una serie di superficie della stessa specie, le quali in generale s'intersegano secondo certe linee. Consideriamo in particolare due di queste superficie

$$F(x, y, z, \alpha) = 0, \quad F(x, y, z, \alpha + \Delta\alpha) = 0:$$

con la diminuzione continua ed indefinita di $\Delta\alpha$, la linea d'intersezione si sposta sulla prima superficie; essa si avvicina di più in più ad un'altra linea data dal sistema dell'equazione (22) e della sua derivata

$$\frac{dF}{d\alpha} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (23).$$

La linea così determinata si chiama *caratteristica.*

Le equazioni della caratteristica contengono il parametro α, e variano per ciascuna delle superficie, in numero infinito, rappresentate da (22) finchè α resta indeterminato. Se si elimina α tra le equazioni (22), (23), si avrà una terza equazione

$$\Phi(x, y, z) = 0; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (24)$$

e questa apparterrà ad una superficie che può essere considerata come il luogo di tutte le caratteristiche.

Per tutt'i punti situati sopra una stessa caratteristica, la superficie (24) ha lo stesso piano tangente di quella tra le superficie (22) alla quale questa caratteristica corrisponde. Infatti, l'equazione del piano che tocca quest'ultima superficie nel punto (x, y, z), è

$$\frac{dF}{dx}(x' - x) + \frac{dF}{dy}(y' - y) + \frac{dF}{dz}(z' - z) = 0;$$

d'altronde, siccome l'equazione (24) non è altra cosa che l'equazione (22) in cui si è messo per α il suo valore in x, y, z, tratto dall'equazione (23), l'equazione del piano tangente della superficie (24) si può mettere sotto la forma

$$\left(\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{d\alpha}\cdot\frac{d\alpha}{dx}\right)(x' - x) + \left(\frac{dF}{dy} + \frac{dF}{d\alpha}\cdot\frac{d\alpha}{dy}\right)(y' - y)$$
$$+ \left(\frac{dF}{dz} + \frac{dF}{d\alpha}\cdot\frac{d\alpha}{dz}\right)(z' - z) = 0,$$

la quale si riduce all'equazione precedente in virtù di (23).

La superficie (24) gode della proprietà di toccare o d'inviluppare le superficie in numero infinito, di cui la serie è data dalla variazione continua del parametro α nell'equazione (22). Si dà per conseguenza a queste il nome *d'inviluppate* ed alla superficie che le tocca il nome *d'inviluppo.* Ciascuna caratteristica è la linea di contatto dell'inviluppo con una inviluppata.

Il sistema delle equazioni (22), (23) e

$$\frac{d^2F}{d\alpha^2} = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (25)$$

quando esse non sono inconciliabili, determina il punto in cui una caratteristica è incontrata dalla caratteristica infinitamente vicina; e l'eliminazione di α tra queste tre equazioni dà le due equazioni dello *spigolo di regresso* della superficie inviluppo descritta dal movimento della caratteristica.

Finalmente se a (22), (23), 25) si aggiunge

$$\frac{d^3F}{d\alpha^3} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (26)$$

si può eliminare α e si possono determinare individualmente le coordinate x, y, z di un punto situato sullo spigolo di regresso, che è in generale un punto singolare di questo spigolo.

18. Consideriamo ora l'equazione di una superficie

$$F(x, y, z, \alpha, \beta) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (27)$$

nella quale entrerebbero due parametri arbitrarii α, β: non vi ha luogo a supporre che questi due parametri variino ad un tempo ed indipendentemente l'uno dall'altro, poichè ciò non condurrebbe ad alcuna conseguenza geometrica; ma si può naturalmente ammettere che vi sia tra α e β una relazione $\beta = \varphi(\alpha)$, per mezzo di cui l'equazione precedente diviene

$$F(x, y, z, \alpha, \varphi(\alpha)) = 0.$$

Si può ora far variare il parametro α, ciò che genererà una serie d'inviluppate ed una superficie inviluppo corrispondente. Siccome la funzione φ è arbitraria, ciascuna forma che ad essa si assegna determinerà un sistema di superficie inviluppate, avente il suo inviluppo particolare.

D'altronde, siccome l'equazione (27) racchiude due variabili indipendenti x, y, è permesso di differenziarla per rapporto a ciascuna di queste variabili, ciò che dà

$$\frac{dF}{dx} + p\frac{dF}{dz} = 0, \quad \frac{dF}{dy} + q\frac{dF}{dz} = 0 : \ldots\ldots\ldots (28)$$

l'eliminazione di α, β tra le equazioni (27) e (28) conduce all'equazione alle differenze parziali del primo ordine

$$f(x, y, z, p, q) = 0; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (29)$$

e tutte le superficie inviluppate date dall'equazione (27), come anche tutte le superficie inviluppi date dall'eliminazione di α tra le due equazioni

$$F(x, y, z, \alpha, \varphi(\alpha)) = 0, \quad \frac{d \cdot F(x, y, z, \alpha, \varphi(\alpha))}{d\alpha} = 0 \ldots (30)$$

godono evidentemente della proprietà di soddisfare all'equazione (29).

Se si eliminano α, β tra l'equazione (27) e le sue due derivate rispetto ad α e a β

$$\frac{dF}{d\alpha} = 0, \quad \frac{dF}{d\beta} = 0,$$

si ha un'equazione in x, y, z solamente

$$\Psi(x, y, z) = 0, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (31)$$

che soddisfa ancora all'equazione (29); e la superficie (31) gode della proprietà di toccare o d'inviluppare, non solamente le inviluppate (27), ma ancora gl'inviluppi (30).

CAPITOLO III.

DELLA CURVATURA DELLE SUPERFICIE.

Teoremi di Meusnier e di Eulero – Determinazione dei raggi di curvatura principali e degli umbilichi.

19. Si concepisca un'infinità di linee, piane o a doppia curvatura, tracciate sopra una superficie e concorrenti in uno stesso punto: esse avranno nel punto comune dei raggi di curvatura differenti, in numero infinito; ma nondimeno i valori di questi raggi di curvatura saranno legati gli uni agli altri, e si potranno far dipendere da un piccolo numero di elementi. Procediamo ad esporre questa riduzione che è un punto capitale nella teoria delle superficie.

Siano $$z = f(x, y) \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

l'equazione della superficie; (x, y, z) il punto nel quale concorrono le linee che si concepiscono tracciate su questa superficie: dinotiamo con s l'arco di una di queste linee, piana o a doppia curvatura; con ρ' il raggio di prima curvatura di questa linea nel punto (x, y, z); con ρ il raggio di curvatura della *sezione normale* (Art. 10) avente la stessa tangente e che passa per lo stesso punto; con θ l'angolo dei raggi ρ, ρ'; in fine con $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$ le prime e le seconde derivate delle coordinate x, y, z per rapporto all'arco s preso per variabile indipendente: si avrà, differenziando due volte di seguito l'equazione (1),

$$z_1 = px_1 + qy_1 \,, \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$z_2 = px_2 + qy_2 + rx_1^2 + 2sx_1y_1 + ty_1^2 ; \; \ldots\ldots (3)$$

e le derivate x_1, y_1, z_1 saranno legate inoltre dall'equazione di condizione

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 1 \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Il raggio ρ che coincide con la normale alla superficie, fa con le x, y, z degli angoli λ, μ, ν che hanno rispettivamente per coseni (Art. 10)

$$\frac{\pm p}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}}, \quad \frac{\pm q}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}}, \quad \frac{\mp 1}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}};$$

da un' altra parte, il raggio ρ' fa con le stesse coordinate degli angoli di cui i coseni hanno per valori (Art. 5 e 6)

$$\pm \rho' x_2, \quad \pm \rho' y_2, \quad \pm \rho' z_2:$$

d'onde si conchiude, fatta astrazione dal segno di $\cos\theta$, ed in virtù dell' equazione (3),

$$\cos\theta = \rho' \cdot \frac{r x_1^2 + 2s x_1 y_1 + t y_1^2}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}} \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

Le derivate x_1, y_1, z_1 esprimono ancora i coseni degli angoli che forma con le x, y, z la tangente alla linea di cui il raggio di curvatura è ρ': dunque il fattore di ρ' nell'equazione (5) non cambia, qualunque sia questa curva, purchè essa passi pel punto della superficie che si considera, e che la direzione della tangente in quel punto non cambii. In altri termini, si può porre $\rho' = k \cos\theta$, k essendo una costante per tutte le curve tracciate sulla superficie, che hanno la stessa tangente nel punto di concorso. Ma, quando l'angolo θ svanisce, si ha $\rho' = \rho$: dunque $k = \rho$,

$$\rho' = \rho \cos\theta, \ldots (6), \quad \rho = \frac{\sqrt{(1+p^2+q^2)}}{r x_1^2 + 2s x_1 y_1 + t y_1^2} \ldots (7)\ .$$

Così il raggio di prima curvatura di una linea qualunque tracciata sulla superficie, si fa dipendere dal raggio di curvatura della sezione normale che avrebbe la stessa tangente con quella linea, e dall' inclinazione θ.

Allorchè la prima curva è piana, si chiama *sezione obbliqua*, e ρ' diviene la proiezione di ρ sul piano della sezione obbliqua. Il teorema espresso dalla formola (6) porta allora il nome di *teorema di Meusnier*. Si rende il significató della formola più generale estendendolo alle linee a doppia curvatura, come abbiamo spiegato.

Risulta dal teorema di Meusnier che, se si descrive una sfera che abbia per centro e per raggio il centro ed il rag-

gio di curvatura di una sezione normale, tutte le sezioni oblique, che hanno con questa sezione normale la stessa tangente, hanno per cerchi osculatori nel punto comune i circoli minori che sono le intersezioni della sfera con i loro piani rispettivi.

20. Per semplificare la discussione dei raggi di curvatura delle sezioni normali, ammettiamo da principio che il piano delle xy sia condotto parallelamente al piano tangente della superficie, nel punto di concorso delle sezioni, ciò che si riduce a porre $p=0$, $q=0$: la formola (7) diverrà

$$\rho=\frac{1}{rx_1^2+2sx_1y_1+ty_1^2}:$$

e se si pone, come è permesso in virtù dell'equazione (4),

$$x_1=\cos\varphi,\quad y_1=\operatorname{sen}\varphi,\quad \tan\varphi=\alpha,$$

si potrà scrivere

$$\rho=\frac{1}{r\cos^2\varphi+2s\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi+t\operatorname{sen}^2\varphi},\ \ldots\ldots (8)$$

o $$\rho=\frac{1+\alpha^2}{r+2s\alpha+t\alpha^2}:\ \ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

φ dinotando allora l'angolo della sezione normale con un piano condotto per la normale parallelamente a quello delle xz.

Si otterranno i valori *massimi* e *minimi* del raggio di curvatura ρ, cercando i valori di α che rendono nulla o infinita la derivata

$$\frac{d\rho}{d\alpha}=\frac{2[s\alpha^2+(r-t)\alpha-s]}{(r+2s\alpha+t\alpha^2)^2}.$$

Eguagliando il denominatore a zero, avremmo

$$\alpha=\frac{-s\pm\sqrt{(s^2-rt)}}{t},\ \ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

valori i quali non sarebbero reali che posta la condizione $s^2-rt>0$, e che corrisponderebbero ad un raggio di curvatura infinito, o ad una curvatura nulla. I *massimi* e *mi-*

nimi propriamente detti sarebbero dunque esclusivamente dati dall'equazione

$$\alpha^2 + \frac{r-t}{s}\alpha - 1 = 0, \ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

d'onde si trae $\alpha = \frac{t - r \pm \sqrt{[(t-r)^2 + 4s^2]}}{2s}$.

Questa espressione, sempre reale, ci mostra: 1° che per ogni superficie, e per tutt'i punti non singolari in cui le derivate parziali p, q, r, s, t possono determinarsi in funzione delle due variabili indipendenti, senza soluzione di continuità, esistono tra le sezioni normali due *sezioni principali* per le quali il raggio di curvatura ha un valore massimo o minimo; 2° che i piani di queste sezioni principali si tagliano ad angoli retti, poichè il prodotto delle radici dell'equazione (11) è eguale a -1.

21. Possiamo dunque condurre parallelamente ai piani delle sezioni principali i piani delle xz e delle yz di cui avevamo lasciata la direzione indeterminata, in modo che, delle due radici dell'equazione (11), l'una sia nulla e l'altra infinita; ciò che equivale a scegliere la direzione dei piani coordinati in modo che si abbia $s = 0$. Il valore di ρ diviene allora

$$\rho = \frac{1}{r\cos^2\varphi + t\,\text{sen}^2\varphi};$$

e si ha, dinotando con R_1, R_2 i due *raggi di curvatura principali*, che corrispondono rispettivamente a $\text{sen}\,\varphi = 0$, $\cos\varphi = 0$,

$$R_1 = \frac{1}{r}, \qquad R_2 = \frac{1}{t},$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{R_1}\cos^2\varphi + \frac{1}{R_2}\text{sen}^2\varphi \ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

Questa formola notevolissima è dovuta ad Eulero. Essa dà i raggi di curvatura di tutte le sezioni normali, e per conseguenza quelli di tutte le sezioni oblique, in funzione dei raggi di curvatura principali, e degli angoli φ, θ che fissano la posizione dei piani di sezione rispetto ai piani delle sezioni principali.

Dinotando con ρ_1, ρ_2 i valori di ρ per due sezioni normali rettangolari, e d'altronde qualunque, si ricava dall'equazione (12) la relazione elegante

$$\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=r+t \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. (13)$$

Allorchè i due raggi principali R_1, R_2 sono eguali e dello stesso segno, vale a dire, diretti dalla stessa parte del piano tangente, il valore di ρ diviene indipendente dall'angolo φ e lo stesso per tutte le sezioni normali. La superficie della sfera è la sola che goda in tutti i suoi punti di questa proprietà: ma si trovano sopra altre superficie dei punti singolari ai quali appartiene la stessa proprietà, e che Monge ha chiamati *umbilichi*.

22. Se le derivate r, t sono dello stesso segno, i raggi principali R_1, R_2 sono anche dello stesso segno, ed il segno di ρ non cambia: la superficie volge la sua convessità nello stesso senso rispetto al piano tangente, intorno al punto di contatto.

Ammettiamo ora che i raggi principali siano di segni contrarii, per esempio R_1 positivo ed R_2 negativo: vi saranno delle sezioni normali situate al di sopra del piano tangente ed altre al di sotto. La formola (12) diverrà, dopo che vi si sarà mutato R_2 in $-R_2$, per non avere più a considerare che numeri positivi,

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{R_1}\cos^2\varphi-\frac{1}{R_2}\operatorname{sen}^2\varphi.$$

Si vede che, se si fa crescere l'angolo φ a partire da zero, il raggio variabile ρ incomincerà con essere positivo, ed andrà sempre crescendo, da R_1 sino all'infinito. Quest'ultimo valore corrisponde ad

$$\frac{1}{R_1}\cos^2\varphi=\frac{1}{R_2}\operatorname{sen}^2\varphi, \quad \text{o} \quad \alpha=\pm\sqrt{\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}=\pm\sqrt{\left(-\frac{r}{t}\right)},$$

che è precisamente il valore di α dato dall'equazione (10), dopo che vi si è fatto $s=0$, conformemente all'ipotesi sulla direzione degli assi.

Se dunque si dinota con φ_0 questo valore particolare di φ, e nel piano tangente, si tirano due rette che formano,

con una parallela all'asse delle x, degli angoli eguali a $\pm\varphi_0$, tutte le sezioni normali di cui le tangenti cadono negli spazii angolari in cui φ prende un valore numericamente minore di φ_0, hanno i loro raggi di curvatura positivi, e quelli di cui le tangenti cadono negli spazii complementari hanno i loro raggi di curvatura negativi. R_1 è il più piccolo dei raggi di curvatura positivi; e, per la stessa ragione, R_2 è il valore numerico minimo dei raggi di curvatura negativi, vale a dire $-R_2$ è un massimo algebrico di ρ.

Allorchè t o r prende un valore nullo, s svanendo in conseguenza della disposizione degli assi, l'uno dei raggi principali è infinito, l'altro ha per conseguenza un valore numerico minimo, ed il suo segno è quello di tutti gli altri raggi di curvatura.

23. Faremo osservare che in virtù dell'equazione (8), si può rappresentare geometricamente la grandezza $\sqrt{\rho}$ col raggio vettore di una sezione conica riferita al suo centro, φ essendo l'angolo del raggio vettore con l'asse delle x. Da questa costruzione si dedurrebbe senza altro calcolo, riferendosi alla discussione ben conosciuta delle sezioni coniche, tutto ciò che abbiamo stabilito intorno ai raggi di curvatura delle sezioni normali. Si sa che la sezione conica è un ellisse, se $rt - s^2 > 0$; e, in questo caso, tutt'i raggi vettori della curva ausiliaria essendo finiti e reali, tutt'i raggi di curvatura sono finiti e debbono essere presi con lo stesso segno. Se si ha al contrario $rt - s^2 < 0$, l'ellisse deve essere rimpiazzata da due iperboli coniugate, l'una di queste iperboli corrispondendo ai valori immaginarii del raggio vettore o ai valori negativi del raggio di curvatura. I semiassi dell'ellisse o delle due iperboli coniugate corrispondono in direzione alle sezioni principali, ed in grandezza ai raggi di curvatura principali. Infine, quando si ha $rt - s^2 = 0$, la sezione conica si trova rimpiazzata dal sistema di due rette parallele condotte ad eguali distanze dall'origine: la perpendicolare abbassata su queste rette corrisponde in direzione ad una delle sezioni principali, ed in grandezza al raggio di curvatura minimo.

24. Riprendiamo la formola (7) la quale sussiste, qualunque sia la direzione della normale rispetto agli assi delle x, y, z. Le derivate x_1, y_1 che entrano in questa formola debbono soddisfare all'equazione (4), la quale diviene, in virtù di (2),

$$(1+p^2)\,x_1^2 + 2pqx_1y_1 + (1+q^2)\,y_1^2 = 1\,, \ldots . (14)$$

e da essa si trae, con la differenziazione,

$$[(1+p^2)\,x_1 + pqy_1]\,dx_1 + [(1+q^2)\,y_1 + pqx_1]\,dy_1 = 0.$$

Differenziando l'equazione (7) rispetto a ρ, si ha

$$(rx_1 + sy_1)\,dx_1 + (sx_1 + ty_1)\,dy = 0;$$

e combinando queste due ultime equazioni,

$$\frac{rx_1 + sy_1}{(1+p^2)\,x_1 + pqy_1} = \frac{sx_1 + ty_1}{(1+q^2)\,y_1 + pqx_1} \ldots . (15)$$

Se dunque si dinota con R uno dei raggi di curvatura principali, l'equazione in R si otterrà eliminando x_1, y_1 tra le equazioni (14), (15), e l'equazione

$$R = \frac{\sqrt{(1+p^2+q^2)}}{rx_1^2 + 2sx_1y_1 + ty_1^2} \,.\, \ldots\ldots . (16).$$

Poniamo per abbreviare,

$$V = rx_1^2 + 2sx_1y_1 + ty_1^2 = \frac{1}{R}\sqrt{(1+p^2+q^2)}\,; \ldots (17)$$

moltiplichiamo rispettivamente per x_1 ed y_1 i due termini delle frazioni a sinistra e a dritta del segno d'eguaglianza nell'equazione (15), e dopo ciò faremo le somme dei numeratori e dei denominatori: la frazione risultante, in virtù dell'equazione (14), si ridurrà al polinomio V. Verrà dunque

$$V = \frac{rx_1 + sy_1}{(1+p^2)\,x_1 + pqy_1} = \frac{sx_1 + ty_1}{(1+q^2)\,y_1 + pqx_1}\,,$$

o pure

$$\left.\begin{array}{l} [V(1+p^2) - r]\,x_1 = (s - pqV)\,y_1\,, \\ [V(1+q^2) - t]\,y_1 = (s - pqV)\,x_1\,, \end{array}\right\} \ldots\ldots (18)$$

e con la moltiplicazione membro a membro,

$$[V(1+p^2) - r]\,[V(1+q^2) - t] = (s - pqV)^2.$$

Rimettendo in luogo di V il suo valore in R, ricavato dall'equazione (17), ed ordinando, si avrà finalmente

$$R^2(rt - s^2) - R\,[(1+q^2)\,r - 2pqs + (1+p^2)\,t]\,\sqrt{(1+p^2+q^2)} + (1+p^2+q^2)^2 = 0 \ldots\ldots\ldots . (19)$$

Siano R_1, R_2 le radici di questa equazione, o i valori dei due raggi di curvatura principali, verrà

$$\frac{1}{R_1 R_2} = \frac{rt - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^2};$$

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{(1 + q^2) r - 2pqs + (1 + p^2) t}{(1 + p^2 + q^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Così, la condizione affinchè i raggi R_1, R_2 siano dello stesso segno, è espressa da $rt - s^2 > 0$, qualunque siano le direzioni degli assi coordinati; e la condizione affinchè uno dei raggi principali diventi infinito, è anche espressa generalmente dall'equazione $rt - s^2 = 0$, che caratterizza le superficie sviluppabili.

I raggi di curvatura principali sono, per tutt'i punti di una superficie, eguali in grandezza assoluta e diretti in sensi contrarii, se l'equazione

$$(1 + q^2) r - 2pqs + (1 + p^2) t = 0$$

è verificata per tutt'i punti della superficie.

Le superficie caratterizzate da questa equazione alle differenze parziali del primo e del secondo ordine godono di un'altra proprietà geometrica egualmente osservabile, di essere cioè superficie di area minima.

25. I raggi principali R_1, R_2, e per conseguenza tutt'i raggi di curvatura delle sezioni normali sono eguali e dello stesso segno, se si ha

$$[(1 + q^2) r - 2pqs + (1 + p^2) t]^2 - 4(1 + p^2 + q^2)(rt - s^2) = 0.$$

Questa equazione, potendosi mettere sotto la forma

$$\left[(1 + p^2) t - (1 + q^2) r + 2pq\left(\frac{pqr}{1 + p^2} - s\right)\right]^2$$
$$+ 4(1 + p^2 + q^2)\left(\frac{pqr}{1 + p^2} - s\right)^2 = 0,$$

equivale al sistema

$$\frac{pqr}{1 + p^2} - s = 0, \quad (1 + p^2) t - (1 + q^2) r = 0, \ldots (20)$$

o
$$\frac{r}{1+p^2}=\frac{s}{pq}=\frac{t}{1+q^2}\ldots\ldots\ldots\ldots(21)$$

Si sarebbero ottenute direttamente queste ultime equazioni, esprimendo che le equazioni (18) diano per V, e quindi per ρ, dei valori indipendenti da x_1, y_1.

Le coordinate dei punti ai quali si è dato il nome di *umbilichi* (Art. 21) sono dunque determinate dal sistema delle due equazioni (20), combinate con l'equazione della superficie. Questi punti sono isolati, a meno che le due equazioni (20) non diventino accidentalmente identiche: ciò che indicherebbe l'esistenza sulla superficie di una linea che l'analogia conduce a chiamare *linea umbilicale*, e che Monge ha detto *linea delle curvature sferiche*.

Applichiamo ciò all'ellissoide
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1:$$
si ha
$$p=-\frac{c^2x}{a^2z},\quad q=-\frac{c^2y}{b^2z},$$
$$r=-\frac{c^4(b^2-y^2)}{a^2b^2z^3},\quad s=-\frac{c^4xy}{a^2b^2z^3},\quad t=-\frac{c^4(a^2-x^2)}{a^2b^2z^3}.$$

Poniamo, per semplificare,
$$\frac{a^2(b^2-c^2)}{b^2(a^2-c^2)}=A,\quad \frac{a^2(a^2-b^2)}{a^2-c^2}=B;$$
ci è permesso di fare inoltre l'ipotesi
$$a>b>c,$$
ciò che renderà positive le costanti A, B. Si avranno, per determinare le coordinate x, y degli umbilichi dell'ellissoide, le due equazioni
$$xy=0,\ x^2-Ay^2-B=0,\ \ldots\ldots\ldots(22)$$
di cui le sole soluzioni reali sono
$$y=0,\ x=\pm\sqrt{B}=\pm a\sqrt{\left(\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}\right)}.$$

L'ellissoide ha dunque quattro umbilichi situati simmetricamente alla superficie nel piano della sezione principale che comprende il più grande ed il più piccolo asse. Si dimostra d'altronde, nella discussione analitica delle superficie di 2° grado, che i piani tangenti all'ellissoide, nei quattro punti di cui abbiamo determinato la posizione, sono paralleli a quelli che godono della proprietà di segare l'ellissoide secondo dei cerchi.

Se l'ellissoide ha due assi eguali, gli umbilichi come è facile conchiudere dalle formole precedenti, si confondono con i vertici dell'asse di rotazione.

Linee di curvatura.

26. Immaginiamo che, sopra una superficie data (S) si sia tracciata una linea qualunque (s), e costruita la superficie rigata (Σ) di cui la generatrice è assoggettata a passare per questa linea, restando costantemente normale alla superficie (S): in generale la superficie (Σ) è storta, vale a dire che le sue generatrici non hanno linea inviluppo (Art. 12), o che due normali alla superficie (S), condotte per punti infinitamente vicini, presi sulla linea (s), non s'incontrano. Al contrario, se si determina convenientemente la linea (s), la superficie (Σ) divenendo sviluppabile, ha uno spigolo di regresso (σ) toccato da tutte le rette normali alla superficie (S) e che passano per la linea (s): ciò che si esprime, nel linguaggio proprio al metodo infinitesimale, dicendo che due normali infinitamente vicine s'incontrano in un punto situato sulla linea (σ).

Le equazioni della normale alla superficie (S) nel punto (x, y, z) essendo (Art. 10)

$$x' - x + p(z' - z) = 0, \quad y' - y + q(z' - z) = 0, \ldots (23)$$

le coordinate del punto corrispondente (x', y', z') sullo spigolo (σ) saranno date dal sistema delle due equazioni (23) e delle loro derivate

$$\left. \begin{aligned} -[1 + p(p + qy_1)] + (z' - z)(r + sy_1) = 0, \\ -[1 + q(p + qy_1)] + (z' - z)(s + ty_1) = 0, \end{aligned} \right\} \ldots (24)$$

prese considerando z come una funzione delle variabili x, y, in virtù dell'equazione della superficie (S), ed y come una funzione implicita di x, data dalla descrizione della linea (s), o dalla descrizione della proiezione di questa linea sul piano

xy. Ora, le equazioni (24) le quali non racchiudono più che la coordinata z', non possono sussistere insieme che mercè l'equazione di condizione

$$y_1^2[(1+q^2)s-pqt]+y_1[(1+q^2)r-(1+p^2)t]$$
$$-(1+p^2)s+pqr=0 \ldots\ldots\ldots\ldots(25)$$

Dopo che vi si sono sostituiti per p, q, r, s, t, i loro valori in x, y, forniti dall'equazione della superficie (S), l'equazione (25), in cui non entrano più che le quantità variabili x, y, y_1, è l'equazione differenziale comune a tutte le proiezioni sul piano xy delle linee (s) che hanno la proprietà di rendere sviluppabili le superficie (Σ), o secondo le quali due normali infinitamente vicine, elevate sulla superficie (S), hanno la proprietà di incontrarsi.

Quando si suppone il piano xy parallelo al piano tangente della superficie (S) nel punto (x, y, z), e per conseguenza $p=0$, $q=0$, l'equazione (25) diviene

$$y_1^2+\frac{r-t}{s}y_1-1=0;$$

sicchè essa non differisce dall'equazione (11) che pel cangiamento di α in y_1; d'onde si deve conchiudere: 1° che per ciascun punto della superficie (S) si possono far passare due linee (s_1), (s_2) che si tagliano ad angoli retti, e che godono della proprietà enunciata più sopra; 2° che i piani normali ad (S), condotti secondo le tangenti a queste linee, coincidono con quelli delle sezioni normali principali. Per questa ragione, Monge ha dato alle linee (s_1), (s_2) il nome di ***linee di curvatura***. Sopra ogni superficie, o porzione di superficie, si possono generalmente, per ciò che precede, tracciare a volontà due serie (s_1), (s_2) di linee di curvatura che dividono la superficie in quadrilateri curvilinei di cui tutti gli angoli sono retti.

L'eliminazione di y_1 tra le equazioni (24) dà

$$(z'-z)^2(rt-s^2)-(z'-z)[(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t]$$
$$+1+p^2+q^2=0;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(26)$$

e si ha, dinotando con R il raggio del cerchio osculatore di una delle sezioni principali, di cui il centro è all'intersezione di due normali infinitamente vicine,

$$R=\pm\sqrt{[(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2]}=\pm(z'-z)\sqrt{(1+p^2+q^2)}.$$

L'eliminazione di $z'-z$ tra queste due ultime equazioni riprodurrà l'equazione (19), trovata più sopra con un calcolo meno semplice.

27. Le linee di curvatura, nei punti in cui esse si tagliano, sono tangenti alle due sezioni principali; ma queste sezioni, che sono curve piane, e di cui i piani passano per la normale, non coincidono in generale con le linee di curvatura, le quali, ordinariamente, non sono comprese in un piano.

Per esempio, sopra una superficie di rotazione, l'una delle linee di curvatura è il cerchio d'intersezione della superficie con un piano condotto perpendicolarmente all'asse di rotazione, dal punto della superficie pel quale deve passare la linea di curvatura: poichè tutte le normali alla superficie, condotte dai punti presi sulla circonferenza di questo circolo, vanno a tagliare l'asse di rotazione nello stesso punto; d'onde risulta anche che la porzione della normale, compresa tra l'asse di rotazione e la superficie, è uno dei due raggi di curvatura principali. Ma questa linea di curvatura, quantunque piana nel caso che consideriamo, non coincide con una sezione principale, poichè il suo piano non comprende la normale, a meno che la normale non si trovi accidentalmente perpendicolare all'asse di rotazione.

L'altra linea di curvatura, sopra una superficie di rotazione, è la curva meridiana; poichè le normali alla superficie, condotte per i diversi punti di questa linea, sono tutte comprese nel piano meridiano. Inoltre, la curva meridiana è una sezione principale della superficie, poichè il piano di questa sezione comprende ad un tempo la normale e la tangente ad una delle linee di curvatura. Dunque, per una superficie di rotazione, una delle sezioni principali coincide con una delle linee di curvatura; ed accade lo stesso tutte le volte che una linea di curvatura è piana, e che il suo piano comprende la normale alla superficie. Così, per le superficie cilindriche, le sezioni principali, di cui l'una è la sezione retta, e l'altra la retta generatrice, si confondono rispettivamente con le linee di curvatura.

28. L'equazione (25) diviene identica, e non si può da essa ricavare immediatamente un valore determinato di y_1, quando si hanno le tre equazioni

$$(1+p^2)s-pqr=0,\ (1+p^2)t-(1+q^2)r=0,\ (1+q^2)s-pqt=0,$$

di cui la terza è una conseguenza delle altre due, e che equivalgono al sistema (21); sicchè i punti della superficie per i quali questa circostanza ha luogo, non sono altra cosa che gli umbilichi.

L'equazione (25) essendo soddisfatta identicamente, la normale nel punto (x, y, z) è incontrata dalla normale nel punto infinitamente vicino, in qualunque direzione si prenda questo secondo punto; ma da ciò non deve tirarsi la conclusione che l'umbilico sia un punto nel quale s'intersegano delle linee di curvatura in numero infinito, o che le rette condotte per l'umbilico nel piano tangente siano tutte tangenti a linee di curvatura. Mettiamo, per abbreviare, l'equazione (25) sotto la forma

$$\varphi \cdot y_1^2 + \psi \cdot y_1 + \chi = 0,$$

φ, ψ, χ dinotando delle funzioni di x, y che svaniscono quando il punto (x, y, z) è un umbilico: la differenziazione dell'equazione (25) dà, per determinare y_1, l'equazione di terzo grado

$$\left(\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dy} y_1\right) y_1^2 + \left(\frac{d\psi}{dx} + \frac{d\psi}{dy} y_1\right) y_1 + \frac{d\chi}{dx} + \frac{d\chi}{dy} y_1 = 0.$$

Secondo che questa equazione ha o non ha tutte le sue radici reali, passano tre linee di curvatura per l'umbilico o non ne passa che una sola. Se questa equazione è ancora resa identica dai valori di x, y che convengono all'umbilico, si differenzia alla sua volta, ciò che dà un'equazione di quarto grado in y_1; e secondo che questa nuova equazione ha quattro o due radici reali, o non ha che radici immaginarie, l'umbilico è il punto d'intersezione di quattro o di due linee di curvatura, o pure non passa alcuna linea di curvatura per l'umbilico, e così di seguito. Finalmente, quando i valori di x, y che convengono all'umbilico, rendono identiche l'equazione (25) e tutte le sue derivate successive, l'umbilico è un punto in cui s'intersegano delle linee di curvatura in tutte le direzioni. Questo caso si presenta per i vertici delle superficie di rotazione, i quali godono manifestamente della proprietà caratteristica degli umbilichi (quando essi non sono però punti salienti), ed in cui vengono ad intersegarsi tutt'i meridiani che sono linee di curvatura di queste superficie.

Facciamo l'applicazione di ciò che precede all'ellissoide che si è considerato nell'Art. 25: l'equazione (25) diviene

$$Axy\,y_1^2 + (x^2 - Ay^2 - B)\,y_1 - xy = 0; \ldots\ldots (27)$$

ed essa ha per derivata

$$(2Axy_1 + x^2 - Ay^2 - B)\,y_2 + Axy_1^3 + Ayy_1^2 + (x - 2Ay)\,y_1 - y = 0,$$

equazione che si riduce ad $Ay_1^3 + y_1 = 0$, per i valori $y = 0$, $x = \pm\sqrt{B}$, relativi agli umbilichi. Quest'ultima equazione non ammette che la radice reale $y_1 = 0$, per essere A un coefficiente positivo. Non passa dunque che una linea di curvatura per gli umbilichi dell'ellissoide a tre assi disuguali, e questa linea è la sezione che comprende il più grande ed il più piccolo asse.

Se si pone $a = b$, nel qual caso l'ellissoide diviene di rotazione intorno al suo asse minore, preso per asse delle z, si ha $A = 1$, $B = 0$; e le coordinate degli umbilichi sono $x = 0$, $y = 0$, poichè in effetto questi umbilichi si confondono con i poli dell'ellissoide schiacciato. L'equazione (27) può mettersi allora sotto la forma

$$(yy_1 + x)\;(xy_1 - y) = 0,$$

ed essa si decompone in

$$yy_1 + x = 0, \quad xy_1 - y = 0.$$

Per $x = 0$, $y = 0$, il valore di y_1 dato dalla prima equazione è immaginario, e quello che dà la seconda equazione resta affetto da un'indeterminazione reale: come ciò deve essere, poichè tutt' i meridiani che si proiettano in xy secondo rette che passano per l'origine delle coordinate, sono altrettante linee di curvatura dell'ellissoide.

Quando si fa $b = c$, nel qual caso l'ellissoide viene di rotazione intorno al suo asse maggiore preso per quello delle x, si ha $A = 0$, $B = a^2$, e l'equazione (27) si risolve nel sistema

$$y_1 = \infty, \quad (x^2 - a^2)\,y_1 - xy = 0.$$

Se s'introducono nella derivata dell'equazione precedente i valori delle coordinate dei poli o degli umbilichi, vale a dire $x = \pm a$, $y = 0$, si ricaverà $y_1 = 0$; così y_1 non è suscettibile in questi punti che dei due valori $0, \infty$. In effetto, i

meridiani si proiettano in xy secondo delle ellissi che vengono tutte a tagliare perpendicolarmente l'asse delle x, ad eccezione del meridiano di cui la proiezione è lo stesso asse delle x.

29. Ai due sistemi di linee di curvatura rettangolari (s_1), (s_2) corrispondono (Art. 26) due sistemi di superficie sviluppabili (Σ_1), (Σ_2), e di spigoli di regresso (σ_1), (σ_2). Il luogo degli spigoli di regresso del primo sistema è una certa superficie, e quello degli spigoli di regresso del secondo sistema è un'altra superficie; o piuttosto i due sistemi di superficie sviluppabili, presi insieme, hanno per luogo dei loro spigoli di regresso una superficie a due falde (σ_1, σ_2), ciascuna falda riferendosi a ciascuno dei sistemi rettangolari.

Per ottenere in x', y', z' l'equazione di questa superficie a due falde, che è anche il luogo dei centri di curvatura delle sezioni principali della superficie (S), bisognerebbe eliminare x, y, z tra le equazioni (23), (26) e quella della superficie (S).

Ciascun raggio di curvatura principale, toccando uno degli spigoli di regresso, tocca la superficie che è il luogo di tutti questi spigoli: la superficie dei centri delle curvature principali è dunque, rispetto alla superficie primitiva, l'analoga della sviluppata (evoluta) di una curva piana rispetto alla curva sviluppante (involuta).

I due centri delle curvature principali, per uno stesso punto della superficie (S), trovandosi sulla stessa normale, ne risulta che ciascuna normale alla superficie (S) tocca ciascuna delle due falde della superficie (σ_1, σ_2). Se si conducono per questa normale due piani tangenti rispettivamente alle due falde, questi due piani sono rettangolari, in virtù della proprietà essenziale delle linee di curvatura. Dunque le due falde della superficie dei centri di curvatura hanno tra loro tali rapporti di forma, che, guardate da un punto qualunque O, i loro *contorni apparenti* s'intersegano ad angoli retti. Infatti, i contorni apparenti delle due falde della superficie (σ_1, σ_2) sono le linee di contatto di queste falde e delle superficie coniche circoscritte, che hanno il vertice in O. Ora queste due superficie coniche hanno una generatrice comune, che è la normale condotta dal punto O alla superficie (S), e di più i loro piani tangenti secondo questa generatrice sono rettangolari.

FINE DEL CALCOLO DIFFERENZIALE.





